Линейные уравнения в частных производных первого порядка

В приложениях достаточно часто возникают дифференциальные уравнения, неизвестные в которых являются функциями от нескольких переменных.

При этом, если такие уравнения содержат частные производные от неизвестных порядка не выше первого, то (как будет показано ниже) их решения сводятся к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений и потому традиционно изучаются в курсах, аналогичному нашему.

Пусть в некоторой области $G \subseteq E^{2n+1},\ n \geq 2$ определена действительная непрерывно дифференцируемая функция

$$F(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u,\, p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n)$$

такая, что в каждой допустимой точке $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial F}{\partial p_k}\right)^2 \neq 0$. Тогда можно дать

Определение 6.5.1	Уравнение вида $$F\left(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1},\, \frac{\partial u}{\partial x_2},\, \ldots,\, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{6.5.1}$$ называется *уравнением в частных производных первого порядка* относительно неизвестной функции $u = u(x),\ x \in \Omega \subseteq E^n$, где $$\|x\| = \|x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\|^{\mathrm{T}}.$$

Определение 6.5.2

Функция $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *решением* уравнения (6.5.1), если

1°. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция в Ω.

2°. $\forall x \in \Omega$ точка

$$\left\| x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|^{\mathrm{T}} \in G\,.$$

3°. $\forall x \in \Omega$

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \equiv 0\,.$$

Среди уравнений вида (6.5.1) важную для приложений роль играют их специальные частные случаи: *линейные* и *квазилинейные* уравнения.

К линейным уравнениям в частных производных первого порядка относят уравнения вида

$$A_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)u + \sum_{k=1}^{n} A_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

а *квазилинейными* называют уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\,.$$

Как легко видеть к линейным относятся уравнения, в запись которых неизвестная функция и ее производные входят линейно, а для квазилинейных уравнений линейность имеется лишь по производным.

Важно: в обоих случаях предполагается, что известные функции $A_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $A_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ удовлетворяют в Ω и в G соответственно условиям:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2(x) \neq 0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k^2(x, u) \neq 0\,.$$

Приступим теперь к рассмотрению методов решения уравнений (6.5.1).

Поскольку алгоритмы решений для разных классов этих уравнений базируются на идеях, аналогичных друг другу, рассмотрим подробно метод решения линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0\,, \tag{6.5.2}$$

где $A_k(x)\ \ \forall k = [1, n]$ – известные непрерывно дифференцируемые в Ω функции такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2(x) \neq 0\ \ \forall\, x \in \Omega\,.$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $A(x)$

$$\| A(x)\| = \| A_1(x_1, \ldots, x_n) \; A_2(x_1, \ldots, x_n) \; \ldots \; A_n(x_1, \ldots, x_n) \|^{\mathrm{T}}.$$

Тогда уравнение (6.5.2) можно записать в неразвернутом матричном виде как

$$\| A(x)\|^{\mathrm{T}} \| \operatorname{grad} u(x)\| = 0\,.$$

Определение 6.5.3	Автономная система $$\| \dot{x}(t)\| = \| A(x)\| \qquad (6.5.3)$$ называется *характеристической системой* для уравнения (6.5.2), а ее фазовые траектории – *характеристиками* этого уравнения.

Связь между решением уравнения (6.5.2) и решением его характеристической системы (6.5.3) описывает

Теорема 6.5.1 **В некоторой окрестности каждой неособой точки $x_0 \in \Omega$ общее решение уравнения (6.5.2) имеет вид**

$$u(x) = \Phi\left(\, u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x)\,\right)\,,$$

где $u_{(k)}(x), k = [1, n-1]$ – функционально независимые в x_0 первые интегралы системы (6.5.3), а $\Phi\,(\,\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_{n-1})$ любая непрерывно дифференцируемая функция от $n-1$ переменной.

Доказательство.

1°. По теореме 6.4.1 каждое решение уравнения (6.5.2) является первым интегралом его характеристической системы (6.5.3), поскольку из (6.5.2) следует, что производная этого решения в силу системы (6.5.3) оказывается равной нулю.

2°. Согласно пункту 2° теоремы 6.4.3 для $u(x)$ любого первого интеграла характеристической системы (6.5.3) в некоторой окрестности точки $x_0 \in \Omega$ существует множество, состоящее из $n-1$ функционально независимых первых интегралов $\left\{ u_{(1)}(x),\, u_{(2k)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x) \right\}$ такое, что

$$u(x) = \Phi\left(u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x) \right) ,$$

где $\Phi\,(\,\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{n-1})$ любая непрерывно дифференцируемая функция от $n-1$ переменной.

Теорема доказана.

Заметим также, что для решения уравнения вида

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u)\,.$$

можно применить алгоритм решения уравнения (6.5.2), если принять за неизвестную функцию

$$v(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u) = u(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) - u\,,$$

увеличив размерность задачи на единицу и записав уравнение в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u)\frac{\partial v}{\partial x_k} + b(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0\,.$$

Поскольку в этом случае $\quad \dfrac{\partial v}{\partial u} = -1\,.$

Таким образом можно заключить, что общее решение однородного уравнения в частных производных первого порядка содержит в своей записи произвольную, непрерывно дифференцируемую функцию, зависящую от $n-1$ переменной, в то время как, например, общее решение векторного обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = F(t, x)$ выражается через n произвольных постоянных.

Для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка правило записи общего решения полностью аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений: общее решение неоднородного уравнения есть общее решение однородного, сложенного с частным (любым!) решением неоднородного.

Выделение конкретного частного решения из общего для уравнений в частных производных осуществляется путем задания дополнительных условий: начальных, краевых, смешанных и т. д.

Рассмотрим в качестве примера *задачу Коши* для уравнения (6.5.2).

Пусть непрерывно дифференцируемая функция $s(x)$, $x \in \Omega \subseteq E^n$ такова, что $\operatorname{grad} s(x) \neq o \ \ \forall\, x \in \Omega$. Тогда уравнение $s(x) = 0$ задает в Ω гладкую гиперповерхность γ, называемую *начальной поверхностью.* И пусть на этой начальной поверхности задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$. Теперь мы можем дать

Определение 6.5.4	*Задачей Коши* называется задача отыскания $u(x)$ – такого решения уравнения $$\|\, A(x)\|^{\mathrm{T}} \|\operatorname{grad} u(x)\| = 0\,, \qquad (6.5.4)$$ для которого $u(x)\Big\vert_{x\in\gamma} = \varphi(x)$.

Задача Коши для линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка, в отличие от случая обыкновенных линейных уравнений первого порядка, обладает следующими особенностями:

во-первых, ее решение существует и единственно не для любой гладкой начальной поверхности γ.

во-вторых, ее разрешимость имеет локальный характер.

Для уточнения условий однозначной разрешимости задачи Коши дадим

Определение 6.5.5	*Характеристической точкой задачи Коши вида* (6.5.4) называется точка $x_0 \in \gamma$ такая, что $$\dot{s}(x_0) = \|\, A(x_0)\|^{\mathrm{T}} \|\,\mathrm{grad}\, s(x_0)\| = 0\,.$$

Сравнение определений 6.5.4 и 6.5.5 дает следующую геометрическую интерпретацию: в характеристической точке вектор $A(x_0)$ касается поверхности γ.

При этом оказывается справедливой

Теорема 6.5.2 **Если точка $x_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой задачи Коши (6.5.4), то в $\omega \subset \Omega$ – некоторой окрестности x_0 – решение задачи Коши существует и единственно.**

Доказательство.

Поскольку $x_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой задачи Коши (6.5.4), то $A(x_0) \neq o$. Тогда в ω – некоторой окрестности x_0 – существует $n-1$ функционально независимый первый интеграл характеристической системы (6.5.3)

и общее решение уравнения (6.5.4) есть

$$u(x) = \Phi\left(u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x) \right) .$$

Начальное условие $u(x)\Big|_{x\in\gamma} = \varphi(x)$ однозначно определяет в ω вид функции $\Phi\,(\,\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{n-1})$.

Что бы убедиться в этом, вначале покажем, что в ω к системе уравнений

$$\begin{cases} u_{(k)}(x) = C_k, \quad k = [1, n-1], \\ s(x) = 0 \end{cases} \tag{6.5.5}$$

применима (известная из курса математического анализа) теорема *о системе неявных функций.*

Поскольку все функции, входящие в условие системы (6.5.5) непрерывно дифференцируемы в ω, то для доказательства однозначной разрешимости (6.5.5) достаточно показать, что якобиан

$$J = \frac{\partial\left(u_{(1)},\, u_{(2)},\, \ldots,\, u_{(n-1)},\, s \right)}{\partial\,(\,x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1},\, x_n\,)}\Bigg|_{x=x_0} \neq\; 0.$$

Если предположить противное, то есть что $J = 0$, то из функциональной (а, значит, и линейной) независимости первых $n-1$ строк матрицы Якоби следует, что последняя ее строка есть нетривиальная линейная комбинация остальных строк. Значит

$$\frac{\partial s}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u_{(j)}}{\partial x_k}\,.$$

Найдем в этом случае значение $\dot{s}(x)$ – производной в силу системы (6.5.3) – при $x = x_0$. Имеем

$$\dot{s} = \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial u_{(j)}}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u_{(j)}}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \dot{u}_{(j)} = 0\,,$$

поскольку все $u_{(j)}(x),\ j = [1, n-1]$ суть первые интегралы характеристической системы (6.5.3).

Этот результат противоречит условию доказываемой теоремы о том, что x_0 не характеристическая точка задачи Коши. Поэтому $J \neq 0$, теорема о системе неявных функций применима в рассматриваемом случае и в окрестности ω существует единственное непрерывно дифференцируемое решение системы (6.5.5) $x = f\left(u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n-1)}\right)$.

Наконец, $\forall x \in \gamma \cap \omega$ справедливо равенство

$$\varphi(x) = \varphi\left(f\left(u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n-1)}\right)\right) = \Psi\left(u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n-1)}\right) .$$

Поскольку функции $\varphi(x)$ и $f\left(u_{(1)}, u_{(2)}, \ldots, u_{(n-1)}\right)$ известны, то функция

$$u(x) = \Psi\left(u_{(1)}(x), u_{(2)}(x), \ldots, u_{(n-1)}(x)\right) ,$$

являющаяся решением задачи Коши в ω, также известна и единственна.

Теорема доказана.

Теперь продемонстрируем особенности практического использования полученных теоретических результатов.

`Задача 6.5.1` Найти общее решение уравнения

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y(z-x)\frac{\partial u}{\partial y} - z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить для этого уравнения задачу Коши с начальным условием

$$u = y \quad \text{при} \quad x = z\,.$$

`Решение.` 1°. Для данного уравнения в частных производных составляем характеристическую систему в симметричной форме

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y(z-x)} = -\frac{dz}{z^2}\,.$$

2°. Один из двух функционально независимых первых интегралов находим так

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dz}{z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = C_1.$$

3°. Другой первый интеграл попробуем найти из уравнения

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y(z-x)} \qquad \text{или} \qquad \frac{z-x}{x^2}dx = \frac{dy}{y}\,.$$

С учетом $z = \dfrac{x}{C_1 x - 1}$ - условия связи, следующего из уже найденного первого интеграла, получаем

$$\left(\frac{1}{x(C_1 x - 1)} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{dy}{y}.$$

Разложение первого слагаемого в больших скобках дает

$$\frac{1}{x(C_1 x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{C_1 x - 1} \quad \Rightarrow \quad A = -1;\ B = C_1.$$

Откуда

$$-\frac{2}{x}dx + \frac{C_1}{C_1 x - 1}dx = \frac{dy}{y},$$

$$-\ln x^2 + \ln|C_1 x - 1| = \ln|y| + \ln|\tilde{C}_2|\,.$$

Поэтому $\dfrac{C_1 x - 1}{x^2 y} = C_2$, что, с учетом равенства $z = \dfrac{x}{C_1 x - 1}$, окончательно дает $\dfrac{1}{xyz} = C_2$.

Найденные первые интегралы очевидно функционально независимы, поскольку формула для одного из них содержит независимую переменную y, а для другого – нет. Таким образом, в силу теоремы 6.5.1, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z},\ xyz\right).$$

4°. Рассмотрим теперь задачу Коши.

Отметим, что в данной задаче $\varphi(x, y, z) = y$, а начальная поверхность γ это плоскость $x - z = 0$, то есть $s(x, y, z) = x - z$.

Составим вначале вспомогательную систему уравнений (6.5.5), включающую формулы первых интегралов и уравнение, задающее начальную поверхность

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} & = & C_1, \\ xyz & = & C_2, \\ x - z & = & 0. \end{cases} \tag{6.5.6}$$

Конкретный вид функции Ψ, дающей решение задачи Коши, можно найти, если при помощи вспомогательной системы (6.5.6) выразить независимые переменные через C_1 и C_2 и подставить эти выражения в формулу начальной поверхности.

Действительно, из системы (6.5.6) получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{C_1}, \\ y = \dfrac{C_1^2 C_2}{4}, \\ z = \dfrac{2}{C_1}. \end{cases}$$

Первые интегралы (равно как и любые непрерывно дифференцируемые функции от них) сохраняют постоянные значения на траекториях характеристической системы.

Поэтому те условия связи между первыми интегралами, которые имеют место на *начальной* поверхности, остаются верными и при движении вдоль траекторий.

В нашем случае на начальной поверхности

$$u(x, y, z) = y = \frac{C_1^2 C_2}{4},$$

поэтому решением задачи Коши будет функция

`Решение получено.`

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}\right)^2 xyz}{4} = \frac{(x+z)^2 y}{4xz}.$$