

Положения равновесия автономной системы

Пусть $x(t, a)$ есть решение задачи Коши

$$\dot{x} = F(x), \quad x(t_0) = a \in \Omega, \quad (6.2.1)$$

такое, что $x(t, a) \forall t \in T$ целиком находится в некоторой окрестности x_0 – положения равновесия (особого решения) нелинейной системы, т.е. точки, для которой $F(x_0) = 0$.

Дадим определения:

Определение 6.2.1	Положение равновесия x_0 называется <i>устойчивым по Ляпунову</i> (или просто <i>устойчивым</i>), если 1°. Найдется $\Delta > 0$ такое, что решение $x(t, a)$ задачи (6.2.1) существует на T для любых a таких, что $a - x_0 < \Delta$. 2°. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое что, если $a - x_0 < \delta_\varepsilon$, то $x(t, a) - x_0 < \varepsilon \quad \forall t \in T$. Иначе положение равновесия будем называть <i>неустойчивым</i>.
Определение 6.2.2	Положение равновесия x_0 называется <i>асимптотически устойчивым</i>, если 1°. Оно устойчиво по Ляпунову. 2°. При достаточно малых $a - x_0$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = x_0.$

Следует также обратить внимание на то, что пункты 1° и 2° в определении 6.2.2 независимы: из 1° не следует 2°, а из 2° не следует 1°.

Пример
6.2.1

Устойчиво ли нулевое решение уравнения $\dot{x} = -x^2$?

Решение. Очевидно, что $x(t) = 0$ есть решение данного уравнения. Общее ненулевое решение описывается формулой

$$x(t) = \frac{1}{t + C},$$

где C – произвольная константа.

Заметим, что хотя $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, устойчивым нулевое решение не является.

Действительно, при $t = -C$ интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту и $\forall C < 0$ из условия $|x(0)| < \delta$ условие $|x(t)| < \varepsilon$ при $t \in (0, +\infty)$ следовать не будет.

Решение
получено.

Рассмотрим проблему устойчивости положений равновесия для систем (6.1.1) вида

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|, \quad (6.2.2)$$

Пусть матрица $\|A\|$ задает линейное преобразование в унитарном пространстве U^n , имеющее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, среди которых, быть может, имеются равные. Тогда для положения равновесия $x(t) = 0$ справедлива

- Теорема 6.2.1
- 1°. Если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad \forall j = [1, n]$, то $x(t) = 0$ асимптотически устойчиво.
 - 2°. Если $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0 \quad \forall j = [1, n]$ и для каждого λ с $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ его кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, то $x(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову.
 - 3°. Если имеется хотя бы одно λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$ или хотя бы для одного λ с $\operatorname{Re} \lambda = 0$ кратность больше размерности собственного подпространства, то $x(t) = 0$ неустойчиво.

Вернемся теперь к рассмотрению нелинейных систем (6.2.1). Опишем возможные подходы к исследованию такого положения равновесия на устойчивость. Первый подход носит название исследования

устойчивости по линейному приближению и заключается в следующем.

Пусть вектор-функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $x_0 = o$. Тогда она представима в этой окрестности по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) где матрица $\|A\|$ имеет элементы α_{ij} такие, что $\alpha_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{x=o}$, а вектор-функция $R(x)$ не только равна o при $x = o$, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow o} \frac{|R(x)|}{|x|} = 0, \quad \text{где } |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Тогда система уравнений (6.2.1) принимает вид

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\|, \quad (6.2.4)$$

и оказывается справедливой

- | | |
|---|--|
| <p>Теорема 6.2.2 (об устойчивости по линейному приближению)</p> | <p>1°. Если $\ A\$ – матрица системы (6.2.4) такова, что $\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad \forall j$, то решение этой системы $x(t) = o$ асимптотически устойчиво.</p> |
| <p>2°. Если матрица $\ A\$ имеет хотя бы одно λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то решение системы (6.2.4) $x(t) = o$ неустойчиво.</p> | |
| <p>3°. Если $\max_j \operatorname{Re} \lambda_j = 0$, то устойчивость (или неустойчивость) $x(t) = o$ зависит не только от матрицы $\ A\$, но и от вектор-функции $R(x)$.</p> | |

Условия пунктов 1° и 2° являются достаточными для того, чтобы делать заключения об устойчивости (или неустойчивости) положения равновесия $x = o$ системы (6.2.4). Положения равновесия, удовлетворяющие этим условиям, принято называть *грубыми положениями равновесия*.

Рассмотрим в качестве примера вещественную нелинейную автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (6.3.1)$$

где $F_1(x_1, x_2)$ и $F_2(x_1, x_2)$ – заданные вещественные, непрерывно дифференцируемые в области $\Omega \subseteq E^2$ функции.

Найдем фазовый портрет для этой системы в окрестности некоторой точки $\|x_{01} \ x_{02}\|^T \in \Omega$.

Без потери общности можно считать, что $\|x_{01} \ x_{02}\|^T = \|0 \ 0\|^T$.

Если начало координат не есть особая точка, то фазовый портрет можно получить, применяя теорему о выпрямлении траекторий, из которой следует, что фазовые траектории в малой окрестности начала координат суть почти прямые, непересекающиеся линии.

Допустим теперь, что начало координат является положением равновесия системы (6.3.1). Тогда из равенств $F_1(0, 0) = 0$ и $F_2(0, 0) = 0$ и формулы Тейлора следует, что система (6.3.1) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ \dot{x}_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \end{cases}$$

и можно дать

Определение 6.3.1	Линейная однородная система $\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{cases} \quad (6.3.2)$ называется <i>линеаризацией</i> системы (6.3.1) в начале координат.
----------------------	---

Теорема 6.3.1 (0 линеари- зации)	Если для линейного преобразования, задаваемого матрицей $\ A\$, все собственные значения различны и имеют ненулевые вещественные части, то особая точка в начале координат системы (6.3.1) имеет тот же вид фазового портрета, что и ее линеаризация (6.3.2). При этом в малой окрестности особой точки сохраняются такие особенности фазовых траекторий, как направление закручивания и устойчивость.
--	--

В силу вышеизложенного представляется целесообразным вначале изучение характера поведения фазовых траекторий *линейных* автономных систем, которое мы выполним для случая $n = 2$, то есть для случая, когда фазовое пространство есть плоскость.

Рассмотрим линейную, с произвольными вещественными коэффициентами, автономную систему уравнений вида

$$\|\dot{X}\| = \|A\| \|X\|. \quad (6.3.3)$$

**Определение
6.3.2**

Если $\det \|A\| \neq 0$, то систему (6.3.3) называют *простой*, и называют *сложной* при $\det \|A\| = 0$.

В силу определений 6.1.2 и 6.3.2 простая система (согласно теореме Крамера) имеет единственное положение равновесия – начало координат в E^2 – точку o .

Для исследования характера поведения фазовых траекторий системы (6.3.3) удобно найти аналитическое представление ее общего решения, что (как было показано в § 3.1–3.2) требует нахождения собственных значений λ_1 и λ_2 , а также собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, обозначаемых далее как $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$.

Рассмотрим последовательно следующие случаи.

1°. Числа λ_1 и λ_2 вещественные, различные и отличные от нуля

В этом случае в E^2 существует базис из собственных векторов $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$, в котором система (6.3.3) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

и соответственно решения $y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ и $y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы. Уравнения фазовых траекторий получаются из этих решений исключением t и имеют вид

$$y_2 = C_2 \left(\frac{y_1}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \text{при } C_1 \neq 0, \quad (6.3.4)$$

$$y_1 = 0, \quad \text{при } C_1 = 0.$$

Из формул (6.3.4) следует, что если λ_1 и λ_2 одного знака, то фазовые траектории являются дугами парабол, касающихся в начале координат оси Oy_1 при $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. При $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ траектории в начале координат касаются оси Oy_2 .

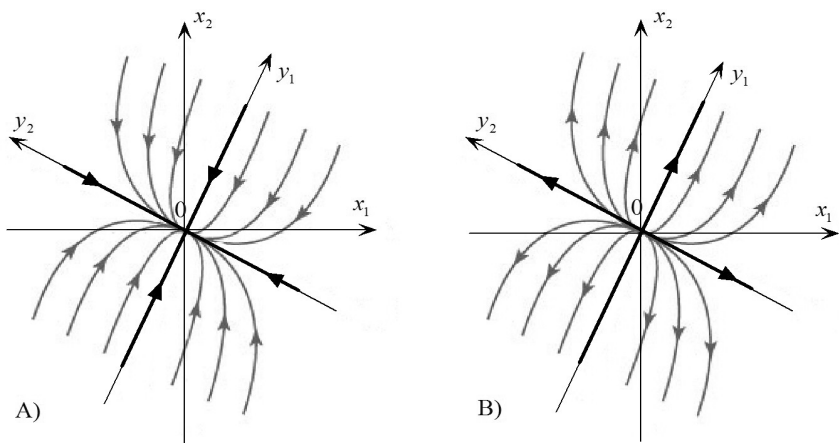


Рис. 1. Положение равновесия *узел*

Если λ_1 и λ_2 отрицательны, то движение с ростом t по фазовым траекториям происходит по направлению к началу координат, и положение равновесия называется *асимптотически устойчивым узлом*.

В случае, когда λ_1 и λ_2 положительны, движение происходит от начала координат (*неустойчивый узел*). Следует отметить, что координатные полуоси, равно как и само начало координат, также являются фазовыми траекториями.

Наконец, следует выполнить обратный переход к исходным переменным x_1 и x_2 , который является линейным невырожденным (аффинным) преобразованием в E^2 . Само преобразование при построении фазового портрета находить необязательно. Достаточно воспользоваться тем его свойством, что собственные векторы матрицы $\|A\|$ являются направляющими векторами прямолинейных фазовых траекторий ¹.

Итоговый вид фазовых портретов для положения равновесия типа *устойчивый узел* показан на рис. 1А, а для положения равновесия типа *неустойчивый узел* – на рис. 1В.

Если λ_1 и λ_2 разных знаков, то положение равновесия называется *седлом*. Оно всегда неустойчиво, поскольку одно из собственных значений матрицы $\|A\|$ положительно.

¹Это свойство следует из теоремы 3.1.2 и того факта, что для прямолинейных фазовых траекторий вектор фазовой скорости коллинеарен самой траектории.

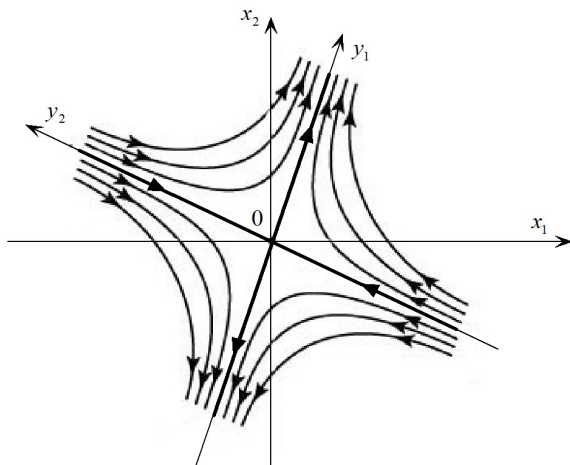


Рис. 2. Положение равновесия *седло* с $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

В базисе из собственных векторов фазовые траектории седла (отличные от координатных полуосей и начала координат) по свойствам аналогичны ветвям гипербол. Действительно, из (6.3.4) имеем:

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} |y_2| = +\infty, \quad \lim_{|y_1| \rightarrow +\infty} y_2 = 0.$$

Движение по траекториям, являющимся координатными полуосями, направлено от начала координат для оси, которой соответствует $\lambda > 0$, и направлено к началу координат, если $\lambda < 0$. По остальным фазовым траекториям направление движения в каждой четверти координатной плоскости определяется направлением движения по смежным координатным полуосям (см. рис. 2).

Переход к исходным переменным выполняется также как и в случае узла.

2°. Собственные значения вещественные, равные и отличные от нуля

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Матрица системы (6.3.3) в жордановом базисе может оказаться диагональной, а может и нет.

В первом случае решение будет $y_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$ и $y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$. Значит, фазовые траектории суть полупрямые, исходящие из начала координат при $\lambda > 0$ или входящие в него при $\lambda < 0$, последний случай показан на рис. 3А. Такое положение равновесия называется соответ-

ственно неустойчивым или асимптотически устойчивым дикритическим узлом.

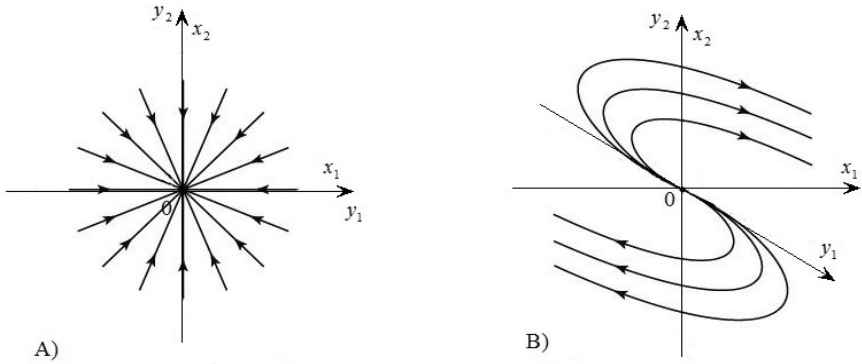


Рис. 3. Положения равновесия дикритический узел и вырожденный узел

Во втором случае система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2. \end{cases}$$

Ее общее решение $y_1(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$ и $y_2(t) = C_2 e^{\lambda t}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы. Уравнения фазовых траекторий получаются из этих решений исключением t и имеют вид (см. рис. 3B)

$$y_1 = \frac{C_1}{C_2} y_2 + \frac{y_2}{\lambda} \ln \frac{y_2}{C_2}, \quad \text{при } C_2 \neq 0,$$

$$y_2 = 0, \quad \text{при } C_2 = 0.$$

Данная особая точка называется вырожденным узлом – неустойчивым, если $\lambda > 0$, и устойчивым, если $\lambda < 0$.

Переход к исходным переменным выполняется так же, как и в предыдущих случаях.

3°. Собственные значения не вещественные и неравные друг другу.

В этом случае из вещественности коэффициентов матрицы $\|A\|$ следует, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ при условии $\beta \neq 0$. Собственные векторы $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$, отвечающие λ_1 и λ_2 , комплексно сопряженные и линейно независимые элементы в унитарном пространстве U^2 ,

поэтому

$$\|h_{(1)}\| = \|p\| + i\|q\| \quad \text{и} \quad \|h_{(2)}\| = \|p\| - i\|q\|,$$

где $\|p\|$ и $\|q\|$ вещественные и линейно независимые элементы пространства E^2 .

Комплекснозначная вектор-функция

$$\|x(t)\| = C_1 e^{\lambda_1 t} \|h_{(1)}\| = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} (\|p\| + i\|q\|)$$

по теореме 3.1.2 является решением системы (6.3.3) при любой комплексной константе C_1 . Кроме того, согласно лемме 2.4.2, решением системы (6.3.3) будет и вещественная вектор-функция $\operatorname{Re} \|x(t)\|$.

Найдем ее вид, представив предварительно константу C_1 в экспоненциальной форме $C_1 = \rho e^{i\theta}$, где $\rho \geq 0$, θ – произвольные вещественные постоянные. Из

$$\|x(t)\| = \rho e^{\alpha t + i(\beta t + \theta)} (\|p\| + i\|q\|)$$

получаем, что

$$\operatorname{Re} \|x(t)\| = \|p\| \rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) - \|q\| \rho e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta).$$

В силу линейной независимости $\|p\|$ и $\|q\|$ можно утверждать, что скалярные функции

$$\begin{cases} y_1(t) = \rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta), \\ y_2(t) = \rho e^{\alpha t} \sin(\beta t + \theta) \end{cases} \quad (6.3.5)$$

задают параметрическое представление интегральных кривых системы (6.3.1) в *новом декартовом базисе* $\{\|p\|; -\|q\|\}$, а сами являются соответствующими декартовыми координатами.

Определение вида фазовых траекторий удобно выполнить, перейдя от декартовой системы координат к полярной по стандартным формулам

$$\begin{cases} y_1 = r \cos \varphi, \\ y_2 = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (6.3.6)$$

Сопоставление формул (6.3.5) и (6.3.6) позволяет получить параметрическое представление фазовых траекторий в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r = \rho e^{\alpha t}, \\ \varphi = \beta t + \theta, \end{cases} \quad (6.3.7)$$

из которого следует, что фазовые траектории в базисе $\{\|p\|; -\|q\|\}$

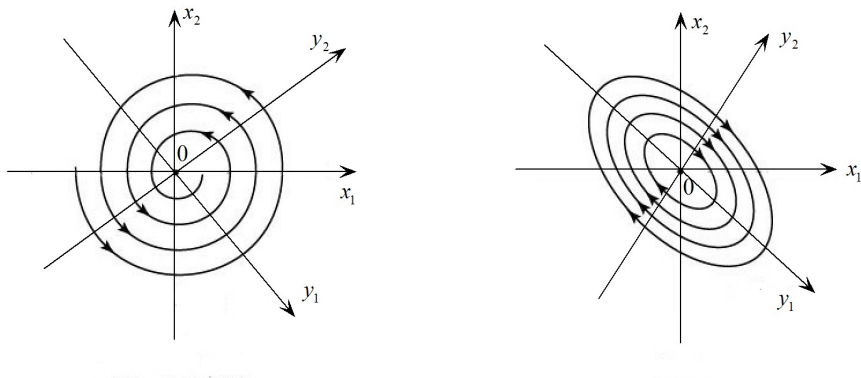


Рис. 4. Положения равновесия *фокус* и *центр*

при $\alpha > 0$ суть раскручивающиеся от начала координат логарифмические спирали (положение равновесия называется *неустойчивым фокусом*);

при $\alpha < 0$ суть скручивающиеся к началу координат логарифмические спирали (положение равновесия называется *асимптотически устойчивым фокусом*);

при $\alpha = 0$ образуют систему концентрических окружностей с центром в начале координат (положение равновесия называется *центром*). Это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Важно отметить: формулы (6.3.7) дают *все* вещественные решения, поскольку для каждой точки $\{y_1, y_2\}$ существуют значения полярных координат ρ и θ такие, что через эту точку проходит *единственная* фазовая траектория вида (6.3.7).

Переход от базиса $\{\|p\|; -\|q\|\}$ к исходному выполняется стандартно.

Направление движения по фазовым траекториям (то есть по часовой стрелке или против) можно установить, найдя фазовую скорость для некоторой конкретной точки, не являющейся положением равновесия. Например из (6.3.3) следует, что в точке $\|1\ 0\|^T$ фазовая скорость равна вектору $\|\alpha_{11}\ \alpha_{21}\|^T$.

Кроме того, для уточнения вида фазовой траектории полезной может оказаться информация о точках, в которых касательная к ней либо горизонтальна (то есть, $\dot{x}_2 = 0$), либо вертикальна ($\dot{x}_1 = 0$). Уравнения соответствующих изоклин находятся из системы (6.3.3) и имеют

вид

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = 0 \quad \text{или} \quad \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = 0$$

соответственно.

Графики фазовых траекторий показаны на рис. 4.

4°. Определитель матрицы системы (6.3.3) равен нулю

Если $\det \|A\| = 0$, то согласно определению 6.3.2 система (6.3.3) называется сложной и в жордановом базисе ее матрица может иметь один из трех следующих видов:

$$\left\| \begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Важно отметить, что для *сложных систем* (6.3.3) изменения коэффициентов или добавления к правым частям слагаемых, малых по сравнению с линейными, может радикально изменить фазовый портрет.

Продemonстрируем использование теоремы о линеаризации на примере следующих задач.

Задача 6.3.1 Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать эскиз фазовых траекторий линеаризаций в окрестности положения равновесия для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(3 + y - y^2), \\ \dot{y} = \arcsin(x - y^2). \end{cases}$$

Решение. 1°. Находим положения равновесия

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ln(3 + y - y^2) = 0, \\ \arcsin(x - y^2) = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} 3 + y - y^2 = 1, \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

2°. Исследуем положение равновесия – точку $M(1; -1)$.
 Вначале перенесем начало координат в особую точку M при помощи замены переменных

$$\begin{cases} u &= x - 1, \\ v &= y + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x &= u + 1, \\ y &= v - 1. \end{cases}$$

В этом случае справедливы равенства

$$\begin{aligned} \ln(3 + y - y^2) &= \ln(3 + (v - 1) - (v - 1)^2) = \\ &= \ln(1 + 3v - v^2) = 3v + o(\sqrt{u^2 + v^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin(x - y^2) &= \arcsin(u + 1 - (v - 1)^2) = \\ &= \arcsin(u + 2v - v^2) = u + 2v + o(\sqrt{u^2 + v^2}). \end{aligned}$$

Откуда следует, что линеаризация (6.3.3) для особой точки M имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} &= 3v, \\ \dot{v} &= u + 2v \end{cases} \implies \|A\| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$, решив характеристическое уравнение $\det \|A - \lambda E\| = 0$.

$$\det \|A - \lambda E\| = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, и положение равновесия M есть седло.

Собственные векторы $\|h\|$ матрицы $\|A\|$ найдем, решив для каждого из собственных значений систему уравнений

$$\|A - \lambda E\| \|h\| = \|o\|.$$

В нашем случае для $\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda_1 \end{vmatrix} \|h_{(1)}\| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \implies \\ \implies \|h_{(1)}\| &= \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично для $\lambda_2 = 3$

$$\left\| \begin{array}{cc} -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda_2 \end{array} \right\| \|h_{(2)}\| = \left\| \begin{array}{cc} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|$$

$$\Rightarrow \quad \|h_{(2)}\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\|.$$

При построении эскиза фазового портрета для особой точки M учитываем, что прямолинейные фазовые траектории имеют своими направляющими собственными векторы $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$ и являются при этом асимптотами для криволинейных траекторий. Направления движения по прямолинейным траекториям: от начала координат для асимптоты с $\|h_{(2)}\|$, так как $\lambda_2 = 3 > 0$, и соответственно к началу координат для асимптоты с $\|h_{(1)}\|$, так как $\lambda_1 = -1 < 0$. Как следствие этого факта, направления движения по криволинейным фазовым траекториям при этом оказываются однозначно определенными, поскольку в силу непрерывности они должны совпадать с направлениями движения по прямолинейным как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Итоговый вид эскиза показан на рис. 5А.

3°. Исследуем теперь второе положение равновесия – точку $N(4; 2)$. Вначале перенесем начало координат в особую точку N при помощи замены переменных

$$\begin{cases} u &= x - 4, \\ v &= y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= u + 4, \\ y &= v + 2. \end{cases}$$

В этом случае справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \ln(3 + y - y^2) &= \ln(3 + (v + 2) - (v + 2)^2) = \\ &= \ln(1 - 3v - v^2) = -3v + o(\sqrt{u^2 + v^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin(x - y^2) &= \arcsin(u + 4 - (v + 2)^2) = \\ &= \arcsin(u - 4v - v^2) = u - 4v + o(\sqrt{u^2 + v^2}). \end{aligned}$$

Откуда следует, что линеаризация (6.3.3) для особой точки N имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = -3v, \\ \dot{v} = u - 4v \end{cases} \Rightarrow \|A\| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$, решив характеристическое уравнение $\det \|A - \lambda E\| = 0$.

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ и положение равновесия N есть устойчивый узел. Собственные векторы $\|h\|$ матрицы $\|A\|$ найдем, решив для каждого из собственных значений систему $\|A - \lambda E\| \|h\| = \|0\|$.

В нашем случае для $\lambda_1 = -1$

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda_1 \end{vmatrix} \|h_{(1)}\| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ \Rightarrow \|h_{(1)}\| = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

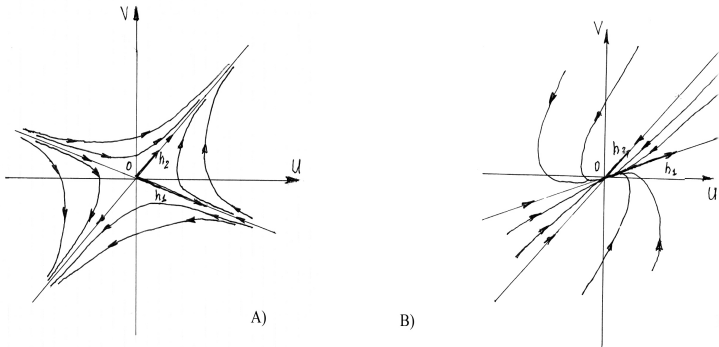


Рис. 5. Фазовые портреты положений равновесия для задачи 6.3.1

Аналогично для $\lambda_2 = -3$

$$\left\| \begin{array}{cc} -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda_2 \end{array} \right\| \|h_{(2)}\| = \left\| \begin{array}{cc} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|$$

$$\Rightarrow \|h_{(2)}\| = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\|.$$

Исследуем теперь свойства фазовых траекторий. Это удобно сделать, перейдя в базис из собственных векторов, то есть в базис $\{\|h_{(1)}\|; \|h_{(2)}\|\}$, координаты в котором обозначим как $p(t)$ и $q(t)$. В этом базисе (как было показано в § 3.1) решения линеаризованной системы (6.3.3) имеют особенно простой вид:

$$\begin{cases} p(t) &= C_1 e^{-t}, \\ q(t) &= C_2 e^{-3t}, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы. При $C_1 = 0$ вид фазовых траекторий очевиден: в зависимости от C_2 , это прямолинейные лучи или точка.

Исключив t из этих равенств при $C_1 \neq 0$, получим уравнения фазовых траекторий в виде $q = Dp^3$, где D – произвольная константа. То есть траектории суть дуги кубических парабол, касающихся в нуле оси $\|h_{(1)}\|$. Направление движения по всем траекториям одинаково: к положению равновесия. Эскиз портрета показан на рис. 5В.

Решение
получено.

Задача
6.3.2

Найти расположенные во второй четверти положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= \exp(4x + 3y - 4) - 1, \\ \dot{y} &= x^2 - 4x - 3y. \end{cases}$$

Определить их характер и нарисовать эскиз фазовых траекторий.

Решение. 1°. Находим положения равновесия

$$\begin{cases} \exp(4x + 3y - 4) - 1 = 0, \\ x^2 - 4x - 3y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4x + 3y = 4, \\ 4x + 3y = x^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -4/3 \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

2°. Перенесем начало координат в положение равновесия – точку $M(-2; 4)$, расположенную во второй четверти, сделав замену переменных $x = u - 2$ и $y = v + 4$. В этом случае значения функций, стоящих в правых частях исследуемой автономной системы будут равны:

$$\begin{aligned} \exp(4x + 3y - 4) - 1 &= \exp(4u + 3v) - 1, \\ x^2 - 4x - 3y &= u^2 - 8u - 3v. \end{aligned}$$

В этой задаче (в отличие от решения задачи 6.3.1) для нахождения коэффициентов линеаризации (6.3.8) мы не будем применять разложений по формуле Тейлора, а воспользуемся формулами (6.3.7), из которых непосредственно следует, что в новом начале координат, то есть в точке $\begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$,

$$\alpha_{11} = \frac{\partial}{\partial u}(\exp(4u + 3v) - 1) = 4,$$

$$\alpha_{12} = \frac{\partial}{\partial v}(\exp(4u + 3v) - 1) = 3,$$

$$\alpha_{21} = \frac{\partial}{\partial u}(u^2 - 8u - 3v) = -8,$$

$$\alpha_{22} = \frac{\partial}{\partial v}(u^2 - 8u - 3v) = -3.$$

Полученные равенства проверьте самостоятельно.

Откуда следует, что линеаризация (6.3.8) для особой точки M имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = 4u + 3v, \\ \dot{v} = -8u - 3v \end{cases} \implies \|A\| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

3°. Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$

$$\det \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ -8 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 12 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = (1 \pm i\sqrt{47})/2$ и положение равновесия M есть неустойчивый фокус. Заметим, что раскручивание спирали фазовой траектории происходит по часовой стрелке, поскольку вектор фазовой скорости например в точке

$$\begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{есть} \quad \begin{vmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \end{vmatrix}.$$

Наконец, легко видеть, что AB – изоклина вертикальных касательных к исследуемой фазовой траектории – имеет уравнение $8u + 3v = 0$, в то время как CD – изоклина горизонтальных – уравнение $4u + 3v = 0$. Итоговый вид эскиза показан на рис. 6.

Решение
получено.

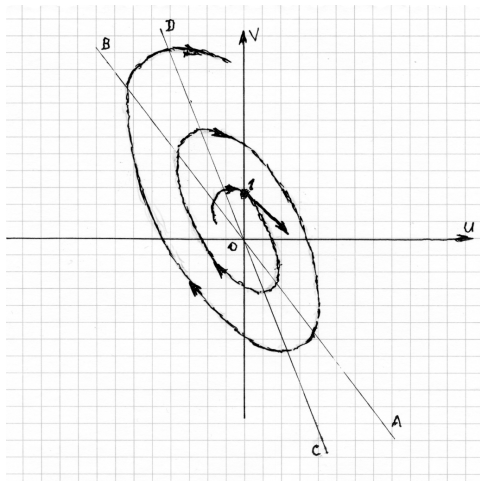


Рис. 6. Фазовый портрет положения равновесия для задачи 6.3.2