Автономные системы уравнений, первые интегралы и их свойства

Определение 6.1.1	*Нормальной автономной системой* дифференциальных уравнений порядка $n \geq 2$ с неизвестной вектор-функцией $x(t)$ $t \in T$ называется система уравнений вида $$\dot{x} = F(x)\,, \qquad x \in \Omega \subseteq E^n\,, \qquad (6.1.1)$$ где вектор-функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы 4.3.1 (Коши) на множестве Ω.

Согласно данному определению независимая переменная t в условие автономной системы явно не входит, а решение задачи Коши для (6.1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ существует и единственно при любых согласованных $t_0 \in T$ и $x_0 \in \Omega$.

При этом отметим, что любая система вида $\dot{x} = F(t, x)$ может быть сведена к автономной путем введения дополнительной скалярной неизвестной $x_{n+1}(t) = t$. Координатная форма системы (6.1.1)в этом случае пополняется $(n+1)$-м уравнением $\dot{x}_{n+1} = 1$ и принимает автономный вид

$$\begin{cases} \dot{x}_k = F_k(x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \forall\, k = [1, n]\,, \\ \\ \dot{x}_{n+1} = 1\,. \end{cases}$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принято называть *фазовыми переменными.*

Пусть $x(t)$ есть частное решение системы (6.1.1), тогда вектор-функция $x(t)$, $t \in T$ параметрически задает некоторую линию в E^n, называемую *фазовой траекторией* этой системы. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать *фазовым портретом* системы (6.1.1).

Заметим, что фазовая траектория и интегральная кривая суть различные способы наглядного представления решений системы (6.1.1), поскольку они образованы точками пространств разных размерностей: n-мерного фазового пространства и $(n+1)$-мерного пространства, образованного векторами с координатными представлениями вида $\|\, t,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \|^{\mathrm{T}}$ (см. рис. 6.1).

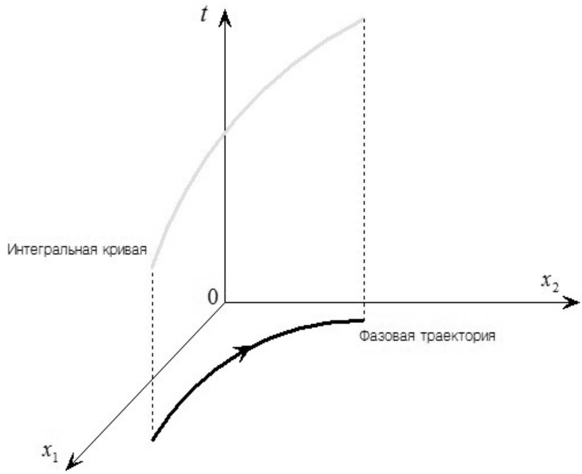

Рис. 1. Интегральные кривые и фазовые траектории

Стрелкой на фазовой траектории принято указывать направление перемещения точки по фазовой траектории при возрастании координаты t.

Пример 6.1.1 : для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \quad x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -x_1\,, \end{cases}$$

каждая интегральная кривая есть в $E^3\{\,t, x_1, x_2\}$ винтовая (или прямая при $C_1 = 0$) линия

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos(t + C_2), \\ x_2 = C_1 \sin(t + C_2), \end{cases}$$

в то время как фазовые траектории являются в $E^2\{x_1, x_2\}$ окружностями (или точкой при $C_1 = 0$) вида $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$. Причем для каждой фазовой траектории с конкретным значением C_1 имеется бесконечно много интегральных кривых с различными значениями C_2.

Укажем некоторые полезные свойства решений автономных систем и их фазовых траекторий.

Теорема 6.1.1 **Если вектор-функция $x(t)$ есть решение автономной системы (6.1.1) при $t \in T$, то вектор-функция $x(t+c)$ (где c такая константа, что $t+c \in T$) также является решением системы (6.1.1) при всех допустимых t.**

Теорема 6.1.2 **Если фазовые траектории решений $x(t)$, $t \in T_1$ и $y(t)$, $t \in T_2$ автономной системы (6.1.1) имеют общую точку $b = x(t_1) = y(t_2)$, то $y(t) \equiv x(t + t_1 - t_2)$ для всех t, при которых определены обе части последнего тождества.**

Утверждение теоремы 6.1.2 означает, что фазовые траектории автономных систем либо не имеют общих точек, либо совпадают. Поэтому вектор-функцию $F(x)$ можно рассматривать в области Ω как задающую векторное поле *фазовых скоростей*, каждый ненулевой элемент которого является вектором, касательным к фазовой траектории, проходящей через точку $x \in \Omega$.

Напомним, что для точек с нулевой фазовой скоростью используется

Определение 6.1.2 *Положением равновесия* или *точкой покоя* [1] системы (6.1.1) называется ее решение вида

$$x(t) = x_0 \in \Omega \quad \forall t \in T$$

такое, что $F(x_0) = o$.

Иначе говоря, положение равновесия есть постоянное (во времени) решение системы (6.1.1), фазовая траектория которого является точкой в фазовом пространстве E^n, а соответствующая этому решению интегральная кривая в E^{n+1} есть прямая, параллельная оси Ot. Из определения 6.1.2 также следует, что поиск положений равновесия системы (6.1.1) сводится к решению конечной (не дифференциальной) системы уравнений $F(x_0) = o$.

Наконец, из вышесказанного следует, что *неособое решение* не может проходить через стационарную точку ни при каких конечных t.

[1] Используются также термины *особое решение* или *стационарное решение*.

Оно может лишь асимптотически к ней приближаться при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

`Теорема 6.1.3` **Пусть $x(t)$, $t \in T$ – неособое решение системы (6.1.1), фазовая траектория для которого замкнутая линия. Тогда $x(t)$ – периодическая функция.**

Из теорем 6.1.1–6.1.3 вытекает

`Следствие 6.1.1` **Каждая фазовая траектория автономной системы (6.1.1) является либо точкой, либо незамкнутой линией или замкнутой линией без самопересечений.**

Групповое свойство автономной системы (6.1.1) описывает

`Теорема 6.1.4` **Пусть $x(t, a)$ есть решение задачи Коши следующего вида $\dot{x} = F(x),\ x(0) = a$. Тогда**

$$x(t, x(t_0, a)) \equiv x(t + t_0, a)$$

для любых допустимых t и t_0.

Следует отметить, что исследование поведения фазовых траекторий системы (6.1.1) в малой окрестности некоторой точки фазового пространства *единообразно* выполнить удается, вообще говоря, не всегда. Например в случаях, когда рассматриваемая точка является положением равновесия, оказывается, что фазовый портрет существенно зависит от типа этого равновесия (соответствующие случаи будут рассмотрены в последующих параграфах). Однако в окрестности неособой точки характер поведения фазовой траектории качественно одинаков для любых автономных систем.

Пусть формулы $x = \varphi(y)\ \ \forall\, y \in \Theta \subset E^n$, $x \in \Omega \subset E^n$ задают замену переменных $\{\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \,\}$ на $\{\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \,\}$. Напомним

Определение 6.1.3	Замена переменных $x = g(y)$ называется *гладкой обратимой* в Θ, если 1°. Преобразование $x = g(y)$ взаимно однозначно отображает Θ в Ω; 2°. Вектор-функции $x = g(y)$ и, обратная к ней $y = g^{-1}(x) = h(x)$, непрерывно дифференцируемы на множествах Θ и Ω соответственно; 3°. Якобиан $$\frac{\partial\,(\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n\,)}{\partial\,(\,y_1,\,y_2,\,\ldots,\,y_n\,)} \neq 0 \quad \forall y \in \Theta\,.$$
Определение 6.1.4	Замена переменных $y = h(x)$ называется *обратной* к замене $x = g(y)$.

Замена переменных, обратная к гладкой и обратимой, также гладкая и обратимая в силу определений 6.1.3 и 6.1.4.

Будет справедлива

Теорема 6.1.5 (О выпрямлении траекторий)

В малой окрестности точки $a \in \Omega \subseteq E^n$, не являющейся положением равновесия, система (6.1.1) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_{n-1} = 0, \\ \dot{y}_n = 1 \end{cases} \tag{6.1.2}$$

некоторой гладкой обратимой заменой $x = g(y)$.

Отметим, что

1°. При выбранной начальной точке a замена (6.1.7) может считаться известной, ибо существование и единственность непрерывно дифференцируемой вектор функции $x = \varphi(t)$ следует из теоремы Коши.

2°. Система (6.1.1) в переменных $\{ y_1, y_2, \ldots, y_n \}$ легко интегрируется. Ее фазовые траектории суть отрезки прямых

$$\begin{cases} y_1(u) & = & a_1 \,, \\ y_2(u) & = & a_2 \,, \\ & \cdots & \\ y_{n-1}(u) & = & a_{n-1} \,, \\ y_n(u) & = & u + C \,, \end{cases}$$

что оправдывает название теоремы.

3°. Практическое значение теоремы 6.1.5 ограничено тем обстоятельством, что замена (6.1.7) для каждой точки a своя. Иначе говоря, построить эту замену единообразно для *немалого* множества Ω удается лишь исключительных случаях.

`Определение 6.2.4`	*Производной в силу системы* (6.2.1) *от функции* $\Phi(x)$ называется выражение $$\grave{\Phi}(x) = \|\, \mathrm{grad}\, \Phi(x) \,\|^{\mathrm{T}} \, \|F(x)\| \; = \; = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} F_j(x) \,.$$

Нетрудно заметить, что производная в силу системы [2] (6.2.1) есть полная производная по t от сложной функции $\Phi(x(t))$, если $x(t)$ – решение этой системы. При этом в произвольной точке x для вычисления значений производной в силу системы решать саму систему не требуется.

Пусть задана автономная система

$$\dot{x} = F(x) \,, \quad x \in \Omega \subseteq E^n \,, \tag{6.4.1}$$

где $F(x)$ непрерывно дифференцируемая, вещественная вектор-функция, а $x(t)$ $t \in T$ – решение системы (6.4.1) на промежутке T.

`Определение 6.4.1`	Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ называется *первым интегралом* системы (6.4.1), если $u(x(t)) \equiv \mathrm{const} \;\; \forall t \in T$ для *каждого* решения $x(t)$ этой системы.

[2]В формулах производную в силу системы будем помечать левым наклонным верхним штрихом, например, $\grave{F}$.

Тривиальным примером первого интеграла может служить функция $u(x) \equiv const$. Условия же существования нетривиальных первых интегралов формулируются с помощью понятий *производной в силу системы* (см. определение (6.2.4)) и *функциональной независимости* первых интегралов.

Определение 6.4.2	Первые интегралы $\{u_{(k)}(x)\,,\ k=[1,s]\,,\ \ s\le n\}$ называются *функционально независимыми* в точке $a\in\Omega$, если ранг матрицы Якоби равен s, то есть $$\operatorname{rg}\left(\left\Vert\frac{\partial u_{(k)}}{\partial x_j}\right\Vert\Bigg|_{x=a}\right)=s\,,\quad \text{где } k=[1,s]\,,\ \ j=[1,n]\,.$$

Согласно этому определению, функциональная зависимость, исходя из известной теоремы о неявных функциях [**?**], означает возможность функционально выразить (локально) один первый интеграл через другой.

Следует также отметить различие понятий функциональной зависимости и линейной зависимости. Из линейной зависимости следует функциональная, но не наоборот. Пример: функционально зависимые функции $u_{(1)}(x_1,x_2)=x_1+x_2$ и $u_{(2)}(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2$ в E^2 линейно независимы.

Критерий существования первого интеграла описывает

Теорема 6.4.1 **Для того чтобы непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ являлась первым интегралом системы (6.4.1), необходимо и достаточно, чтобы $\grave{u}(x)$ – производная от $u(x)$ в силу системы (6.4.1) – равнялась нулю на каждом решении системы (6.4.1).**

Выясним теперь геометрический смысл первого интеграла. Пусть $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\ne 0$ для некоторого j и пусть C – любое из значений первого интеграла $u(x)$, принимаемых в Ω. Тогда уравнение $u(x)=C$ задает в E^n $(n-1)$-мерную гиперповерхность Γ, на которой целиком лежат фазовые траектории системы (6.4.1).

Действительно, пусть точка a принадлежит поверхности Γ, тогда $u(a) = C$. Поскольку $u(x)$ первый интеграл, то в любой точке фазовой траектории, проходящей через a, будет $u(x) = C$. Значит, вся эта траектория лежит на Γ. Заметим, что обратное не верно: не любая линия на поверхности уровня есть фазовая траектория.

Если известен какой-либо первый интеграл $u(x)$, у которого $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого j, то система (6.4.1) может быть сведена к системе с меньшим на единицу числом неизвестных функций. Для этого следует x_j выразить при помощи уравнения $u(x) = C$ через остальные неизвестные и подставить это выражение во все (кроме j-го) уравнения исходной системы (6.4.1). Знание же $n-1$ функционально независимых первых интегралов позволяет получить решение системы (6.4.1) в квадратурах.

Поскольку любая непрерывно дифференцируемая функция от нескольких первых интегралов системы (6.4.1) очевидно также является ее первым интегралом, то первых интегралов у этой системы бесконечно много. При этом однако возникает вопрос о том какое число из них может оказаться функционально независимыми. Ответ на данный вопрос находится при помощи нижеследующих рассуждений.

Система (6.4.1) в неразвернутом матричном виде записывается так:

$$\|\dot{x}\| = \|F(x)\|\,, \quad x \in \Omega \subseteq E^n. \tag{6.4.3}$$

При гладкой обратимой замене переменных $\|x\| = \|g(y)\|$ с матрицей Якоби

$$\|G(y)\| = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right\| \quad \forall i, j = [1, n]$$

и якобианом $\det \|G(y)\| = \dfrac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0 \quad \forall y \in \Omega^*$, в области Ω^*, являющейся образом области Ω, автономная система (6.4.3) примет вид

$$\|\dot{y}\| = \|G(y)\|^{-1} \|F(g(y))\|\,, \quad y \in \Omega^* \subseteq E^n. \tag{6.4.4}$$

Система (6.4.4) непосредственно получается из (6.4.3) в силу равенства

$$\|\dot{x}\| = \|G(y)\| \|\dot{y}\| = \|F(g(y))\|\,.$$

На вопрос о том, как связаны первые интегралы автономных систем (6.4.3) и (6.4.4), отвечает

Теорема 6.4.2 **Для того чтобы непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, $x \in \Omega$ являлась первым интегралом системы (6.4.3), необходимо и достаточно, чтобы функция $v(y) = u(g(y))$, $y \in \Omega^*$ являлась первым интегралом системы (6.4.4).**

Достаточные условия существования $n-1$ функционально независимых первых интегралов системы (6.4.3), а также формулу для любого ее первого интеграла, дает

Теорема 6.4.3 **Пусть точка $a \in \Omega$ не есть положение равновесия системы (6.4.3). Тогда**

1°. В $\omega \subseteq \Omega$ – некоторой окрестности точки a, существует множество, состоящее из $n-1$ функционально независимых первых интегралов $u_{(1)}(x), u_{(2)}(x), \ldots, u_{(n-1)}(x)$.

2°. Для любого первого интеграла $u(x)$ найдется непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ такая, что $u(x) = \Phi(u_{(1)}(x), u_{(2)}(x), \ldots, u_{(n-1)}(x))$, $x \in \omega$.

Следует также иметь в виду, что теорема гарантирует существование функции Φ лишь в ω – окрестности неособой точки a, но не *разом во всей области* Ω. Что касается окрестностей положения равновесия, то в них первые интегралы могут как существовать, так и нет.

Задача 6.4.1 Найти независимые первые интегралы для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\,, \\ \dot{y} &= y\,, \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 + z\,. \end{cases}$$

Решение. Исключая независимую переменную t из первых двух уравнений, получаем

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, что дает $y = C_1 x$. Значит $\dfrac{y}{x}$ есть первый интеграл рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

При поиске первых интегралов часто оказывается удобным использование *правила пропорций* (или *свойства равных дробей*), если

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_m}{\beta_m},$$

то

$$\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m}{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Для использования этого правила запишем исходную систему в так называемом *симметричном виде*, когда нет явного указания на то, какая из переменных является независимой. В этом случае для записи используются не производные, а дифференциалы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае (по правилу пропорций)

$$\frac{(-2x)dx}{(-2x)x} = \frac{(-2y)dy}{(-2y)y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z} = \frac{dz - 2xdx - 2ydy}{z - x^2 - y^2},$$

а это дает равенство полных дифференциалов

$$\frac{d(z - x^2 - y^2)}{z - x^2 - y^2} = \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2.$$

Из равенства $\dfrac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2$, в свою очередь, получаем другой первый интеграл $\dfrac{z - x^2 - y^2}{x}$, который очевидно независим от найденного ранее, поскольку он в своей записи содержит переменную z.

Решение. получено.