Простейшая задача вариационного исчисления

`Семинар по ДУ в гр. Б04-856 гр. Б03-833 (22-25апр2020г.)`

Обозначим как $\mathcal{C}^1[a,b]$ множество всех непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ вещественных функций, расстояние между которыми определяется формулой

$$\rho\,(y_1, y_2) = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y_1'(x) - y_2'(x)| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1[a,b]\,.$$

Заметим, что множество $\mathcal{C}^1[a,b]$ является линейным нормированным пространством с нормой

$$\langle y \rangle = \max_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x)|\ . \tag{1.1}$$

Пусть $F(x,y,p)$ непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a,b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F\Big(x, y(x), y'(x)\Big)dx \tag{1.2}$$

на множестве $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b] \subset \mathcal{C}^1[a,b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y(a) = A$ и $y(b) = B$.

Отметим, что множество $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ будет линейным пространством, а множество $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ при $|A| + |B| \neq 0$ – нет.

`Определение 1.1`	Будем говорить, что функционал (1.2) достигает на функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ *слабого локального минимума* (*максимума*), если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $$\forall y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]\ :\quad \rho\,(\ y(x),\ y^*(x)\ ) < \varepsilon$$ выполняется неравенство $$J(y) \geq J(y^*) \quad (\ J(y) \leq J(y^*)\ )\ .$$ Если неравенства строгие при $y \neq y^*$, то говорят о *строгом* экстремуме. В случае, когда неравенства удовлетворяются *для всех* функций $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, экстремум *абсолютный*.

Задачу отыскания слабого локального экстремума при использовании нормы (1.1) называют *простейшей вариационной задачей* или же *задачей с закрепленными концами.*

Основным инструментом при исследовании на экстремум функционала вида (1.2) служит его *вариация* – функционал, являющийся аналогом производной по направлению от функции многих переменных. Для его определения нам потребуется еще одно подмножество в пространстве $\mathcal{C}^1[a,b]$, а именно $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ – множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $h(x)$ таких, что $h(a) = h(b) = 0$.

Заметим, что при любом вещественном параметре α функция $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha h(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, если $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. Это свойство дает основание называть $\alpha h(x)$ *допустимым приращением* (или, как иногда говорят, *допустимой вариацией*) $y(x)$ – аргумента исследуемого функционала (1.2). Наконец, рассматривая при $|\alpha| \le \varepsilon$ множество значений функционала

$$J(y+\alpha h) = \int\limits_a^b F\left(x, y(x) + \alpha h(x), y'(x) + \alpha h'(x)\right) dx\,, \tag{1.3}$$

можно делать заключения об экстремальных свойствах исходного функционала (1.2) в малой окрестности функции $y(x)$ (в пространстве $\mathcal{C}^1[a,b]$).

Более конкретно, величину и направление изменения $J(y+\alpha h)$ (как функции параметра α при фиксированных $y(x)$ и $h(x)$) можно оценивать числом $\left.\dfrac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$.

Определение 1.2	Выражение $$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right\|_{\alpha=0}$$ называется *первой вариацией* функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ при $\forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. Первую вариацию принято обозначать $\delta J(y,h)$.

При сделанных предположениях (для малых по модулю значений α) функционал $J(y+\alpha h)$ является непрерывно дифференцируемой функцией α. С другой стороны, (1.3) можно рассматривать как собственный интеграл, зависящий от параметра α, для которого справедлива теорема Лейбница (см., например, [?]), утверждающая, что

$$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x) \right) dx\;. \qquad (1.4)$$

Обратите внимание на структурное сходство формулы (1.4) с формулой $\dfrac{\partial F}{\partial l} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial F}{\partial \xi_k}\,\omega_k$, определяющей в E^n величину производной функции $F\,(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots\,\xi_n)$ по направлению $\|l\| = \|\,\omega_1,\,\omega_2,\,\ldots,\,\omega_n\|^{\mathrm{T}}$.

Необходимое условие существования слабого экстремума, используя понятие первой вариации, формулирует

`Теорема 1.1` **Если $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то $\delta J(y^*, h) = 0 \;\; \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$.**

При использовании теоремы 1.1 необходимо убеждаться в равенстве нулю первой вариации $\delta J(y^*, h)$ одновременно *для всех* функций $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$, что может оказаться непростой задачей.

Более удобное для практического использования необходимое условие экстремума в случае простейшей вариационной задачи можно получить (следуя Лагранжу), проверив, что верна (часто называемая *основной леммой вариационного исчисления*)

`Лемма 1.1` **Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$**

и $\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$,

то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Лемма 1.1 позволяет получить необходимое условие простейшей вариационной задачи в следующей упрощенной форме, которую дает

Теорема 1.2 **Пусть $F(x,y,p)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a,b]$, $y \in (-\infty,+\infty)$ и $p \in (-\infty,+\infty)$ функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x)$, $x \in [a,b]$ есть решение простейшей вариационной задачи, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \ . \tag{1.5}$$

Определение 1.3 Всякое решение уравнения Эйлера (1.5) называется экстремалью функционала $J(x,y,y')$.
В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, она называется *допустимой экстремалью.*

Сделанное при выводе уравнения Эйлера предположение о непрерывности второй производной допустимой экстремали оказывается излишним, если использовать, приводимою здесь без доказательства, следующую лемму.

Лемма 1.2 (Дюбуа-Реймона) **Если** $f(x)$ **непрерывна на** $[a,b]$
и $\int\limits_a^b f(x)h'(x)\,dx = 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$,
то $f(x) \equiv \text{const}$ **на** $[a,b]$.

Полученное условие экстремальности является необходимым, но не достаточным. Однако, в тех случаях, когда допустимая экстремаль однозначно определяется уравнением Эйлера и граничными условиями, целесообразно попытаться выполнить исследование на экстремальность непосредственно по его определению. Использование этого метода иллюстрирует

Задача 1.1 Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y'^2\right)\,dx \ , \quad y(0) = 0,\ y(1) = 2 \ .$$

`Решение.` Заметим, что

$$J(y) = \frac{1}{4} + \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 + 2y'^2 \right) \, dx$$

и исследование на экстремальность достаточно выполнить для функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 + 2y'^2 \right) \, dx \ .$$

Составим и решим уравнение Эйлера. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y \ , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 4y' \ , \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 4y'' \ .$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y'' - y = 0 \ .$$

Общее решение этого уравнения

$$y(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{2} \right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{2} \right)$$

есть множество всех экстремалей, в том числе и допустимых.

Граничные условия имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} C_1 & + & C_2 & = & 0 \ , \\ C_1 e^{\frac{1}{2}} & + & C_2 e^{-\frac{1}{2}} & = & 2 \ . \end{array} \right.$$

Откуда находим, что $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{\operatorname{sh} \dfrac{1}{2}}$,

и единственная *допустимая* экстремаль дается формулой

$$y^*(x) = \frac{2 \operatorname{sh} \dfrac{x}{2}}{\operatorname{sh} \dfrac{1}{2}} \ .$$

Исследуем найденную допустимую экстремаль на оптимальность. Пусть $h(x)$ – произвольная пробная функция из класса $\mathcal{C}^1_{00}[0,1]$. Оценим знак приращения функционала

$$J(y^*+h)-J(y^*)=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{(y^*+h)^2}{2}+2((y^*)'+h')^2-\frac{(y^*)^2}{2}-2((y^*)')^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1 y^*h\,dx+4\int\limits_0^1(y^*)'h'\,dx+\int\limits_0^1\left(\frac{h^2}{2}+2h'^2\right)dx=$$

(проинтегрировав второй интеграл по частям и перегруппировав слагаемые)

$$=\int\limits_0^1\left(y^*-4(y^*)''\right)h\,dx+4(y^*)'h\Big|_0^1+\int\limits_0^1\left(\frac{h^2}{2}+2h'^2\right)dx\ge 0,$$

поскольку первый интеграл равен нулю в силу равенства $y^*-4(y^*)''=0$, а проинтегрированная часть есть ноль по свойству пробной функции $h(0)=h(1)=0$.

Таким образом, приходим к заключению о том, что допустимая экстремаль $y^*(x)$ доставляет исследуемому функционалу абсолютный минимум.

`Решение получено.`

Допустимая экстремаль, находимая из уравнения Эйлера, вообще говоря, не обязательно является решением простейшей вариационной задачи. Этот факт демонстрирует

`Задача 1.2` Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y)=\int\limits_0^\pi\left(y'^2-\frac{25}{4}y^2\right)dx\ ,\quad y(0)=1,\ y(\pi)=2\ .$$

`Решение.` Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$y'' + \frac{25}{4} y = 0 \; .$$

Его общее решение есть

$$y(x) = C_1 \cos \frac{5x}{2} + C_2 \sin \frac{5x}{2} \; ,$$

а допустимая экстремаль

$$y^*(x) = \cos \frac{5x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \; .$$

Возьмем $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[0, \pi]$ вида $h(x) = \dfrac{1}{k} \sin nx$, где k и n – произвольные натуральные числа. Тогда, выполнив преобразования аналогичные сделанным при решении задачи 1.1, получим

$$\Delta J = J(y^* + h) - J(y^*) =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(h'^2 - \frac{25}{4} h^2 \right) dx = \left(n^2 - \frac{25}{4} \right) \frac{\pi}{2k^2}.$$

Откуда следует, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Delta J < 0$ при $n = 1;\ 2$

и $\Delta J > 0$ при $n \geq 3\,.$

`Решение получено.` Значит $y^*(x)$ не является решением данной вариационной задачи.

В заключение обсуждения постановки простейшей задачи вариационного исчисления обратим внимание на то, что в определении 1.1 в названии типа экстремума присутствует прилагательное «слабый». Возникает вопрос: какой смысл в использовании этого термина?

Ответ заключается в том, что линейное пространство, образованное функциями непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$ не является конечномерным. Действительно, при исследовании функционалов на экстремум необходимо иметь количественную оценку степени близости произвольной пары элементов в этом пространстве. Как известно, одним из способов построения такой оценки является введение нормы элемента (например по формуле (1.1), т.е. превращение рассматриваемого линейного пространства в нормированное. Однако, различные типы норм в линейных пространствах, не имеющих базиса, не эквивалентны друг другу и могут приводить при решении экстремальных задач для одного и того же функционала к различным результатам.

Поясним сказанное следующим примером. Рассмотрим как альтернативу линейному пространству непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой (1.1) нормированное линейное пространство функций, имеющих непрерывную производную, кроме быть может, конечного числа точек на $[a, b]$, в которых производная имеет разрыв первого рода. Норму во втором пространстве определим по формуле $\langle y \rangle = \max\limits_{x \in [a,b]} |y(x)|$. По сложившейся исторически традицией экстремум с такой с нормой принято называть «сильным».

В качестве упражнения найдите допустимую экстремаль для задачи с условиями

$$J(y) = \int\limits_0^1 {y'}^3 \, dx \ , \qquad y(0) = 0, \;\; y(1) = 1 \ .$$

Используя определение 1.1 с разными нормами, покажите, что в этой задаче на допустимой экстремали $y(x) = x$ имеется слабый экстремум, но нет сильного.

В более общем виде связь между условиями существования сильного и слабого экстремума на допустимой экстремали можно сформулировать так: необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума есть достаточное условие слабого.