Обобщение постановок задач вариационного исчисления

Задачи вариационного исчисления с граничными условиями обобщенного вида

`Семинарские занятия по ДУ для групп Б03-833 и Б04-856 на период 29 апреля - 15 мая 2020 года.`

Пусть $F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция. И пусть $y(x)$ принадлежит $\mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ – множеству непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций таких, что $y(a) = A$.

Определение 1.1 Задача отыскания слабого экстремума (то есть функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ с $y^*(a) = A$) функционала

$$J(y) = \int\limits_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx \tag{1.1}$$

называется *задачей со свободным концом.*

Данное название отражает тот факт, что искомая функция при $x = b$ может иметь любое значение.

Необходимое условие оптимальности для задачи со свободным концом дает

Теорема 1.1 **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{A-}[a, b]$ есть решение задачи со свободным концом, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера* $\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$ **и граничному условию**

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0\ . \tag{1.2}$$

Определение 1.2 Всякое решение уравнения Эйлера называется экстремалью в задаче со свободным концом.
В случае, когда экстремаль принадлежит множеству $\mathcal{C}^1_{A-}[a,b]$, она называется *допустимой экстремалью.*

Заметим, что аналогичное необходимое условие оптимальности может быть получено и для левого конца отрезка $[a,b]$.

В задаче со свободным концом правый конец допустимой экстремали мог находиться в любой точке прямой $x = b$. Поэтому ее обобщением естественно считать *задачу с подвижной границей,* которая заключается в поиске экстремали (1.1) при условии, что правый конец экстремали находится на достаточно гладкой линии $y = f(x), x \in [c,d]$ такой, что $a < c$ и $y^*(b) = f(b)$.

Обратите внимание, что в такой постановке значение b является неизвестным.

Необходимое условие оптимальности в задаче с подвижной границей дает

Теорема 1.2 **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x) \in \mathcal{C}^2_{A-}[a,b]$ есть решение задачи с правым концом, лежащем на линии $y = f(x)$, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,,$$

для которого $y(a) = A$, а также граничному условию при $x = b$, носящему название «*условие трансверсальности***»**

$$\left(F(x,y,y') + (f'(x) - y'(x))\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right)\Bigg|_{x=b} = 0\,. \tag{1.3}$$

Вычислительные особенности решения вариационных задач с подвижной границей демонстрирует

`Задача 1.1` Найти допустимые экстремали для вариационной задачи с подвижной границей для функционала

$$J(y) = \int\limits_0^b \left(y - y'^2\right)\, dx$$

с граничными условиями $\quad y(0) = 0, \quad y(b) = b^2 - 2$.

`Решение.` Отметим вначале, что в данной задаче $f(x) = x^2 - 2$. Поскольку:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = -2y', \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = -2y'' ,$$

то уравнение Эйлера будет иметь вид $1 + 2y'' = 0$, а его решение

$$y(x) = -\frac{1}{4}x^2 + Cx + C_1 \ .$$

Откуда, из левого граничного условия $y(0) = 0$ находим, что $C_1 = 0$.

Граничное условие на правом конце является системой равенства $y(b) = b^2 - 2$ и условия трансверсальности. Иначе говоря, неизвестные величины C и b должны, во-первых, удовлетворять равенству

$$-\frac{1}{4}b^2 + Cb = b^2 - 2 \ , \tag{1.4}$$

и, во-вторых, условию трансверсальности

$$\left. \left(F(x,y,y') + (f' - y')\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right|_{x=b} = 0 \ ,$$

подстановка в которое конкретных условий решаемой задачи приводит к однородному уравнению вида

$$2b^2 - 4bC + C^2 = 0.$$

Последнее уравнение дает либо

$$C = (2+\sqrt{2})b, \text{ либо } C = (2-\sqrt{2})b.$$

В первом из этих случаев уравнение (1.4) вещественных решений не имеет, а во втором находится положительное значение

$$b = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\sqrt{2}+3}}{\sqrt{23}}\,,$$

`Решение получено.` составляющее совместно с $y^*(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + Cx$ решение задачи.

Условные вариационные задачи

В большом числе практически важных вариационных задач дополнительные условия (сужающие множество допустимых вариаций) не сводятся лишь к модификации оптимизируемого функционала или граничных условий, а являются ограничениями более общего вида.

Изопериметрическая задача

Пример одной из таких задач, условно называемых *изопериметрическими*: отыскание на плоскости замкнутой линии заданной длины, ограничивающей фигуру максимально возможной площади, был известен еще в античные времена, равно как и ее решение – окружность.

Приведем возможную постановку изопериметрической задачи. Пусть функции $F(x,y,p)$ и $G(x,y,p)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $x \in [a,b]$ и $y\,;\,p \in (-\infty,+\infty)$. Рассмотрим задачу отыскания экстремума функционала по $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))\,dx \tag{2.1}$$

при условии

$$H(y) = \int\limits_a^b G(x,y(x),y'(x))\,dx = l\;, \tag{2.2}$$

где A, B и l – заданные числа. Уравнение (2.2) принято называть *условием связи*, а функционал (2.1) – *целевым функционалом.*

Метод решения изопериметрической задачи – отыскания локального слабого экстремума функционала (2.1) – при условии (2.2), является аналогом метода множителей Лагранжа для задачи на условный экстремум функций многих переменных. Его основой служат функция Лагранжа

$$L(x, y(x), y'(x), \lambda) = F(x, y(x), y'(x)) + \lambda G(x, y(x), y'(x)) \ , \quad \lambda \in R$$

и

`Теорема 2.1` **Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x)$ есть решение изопериметрической задачи и вариация $\delta H(y^*, h) \neq 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$, тогда найдется такое λ, что $y^*(x)$ удовлетворяет** *уравнению Эйлера* **следующего вида**

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \ .$$

Проиллюстрируем применение этой теоремы следующими примерами.

`Задача 2.1` Решить изопериметрическую задачу для функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2 \ dx$$

с граничными условиями $y(0) = 0, \ y(1) = 2$ и условием связи

$$H(y) = \int\limits_0^1 xy \, dx = 1 \ .$$

`Решение.` Лагранжиан в данной задаче имеет вид

$$L(x, y, y', \lambda) = (y')^2 + \lambda xy.$$

Уравнение Эйлера для него будет $2y'' - \lambda x = 0$, поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda x \ , \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = 2y' \ , \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'' \ .$$

Подставив общее решение уравнения Эйлера – уравнение экстремалей –

$$y(x) = \frac{\lambda}{12}x^3 + C_1 x + C_2$$

в условие связи и приняв во внимание граничные условия, находим, что $C_1 = \dfrac{9}{2}$, $C_2 = 0$ и $\lambda = -30$ и, следовательно, допустимая экстремаль имеет вид

$$y^*(x) = -\frac{5}{2}x^3 + \frac{9}{2}.$$

Выясним теперь тип найденной допустимой экстремали.

Пусть пробная функция $h(x)$ такова, что $h(0) = h(1) = 0$. Кроме того, условие связи не должно нарушаться при варьировании, поэтому из равенства

$$\int\limits_0^1 x(y^* + h)\, dx = 1 \quad \text{должно следовать} \quad \int\limits_0^1 xh\, dx = 0\,.$$

Имеем оценку

$$\Delta J = J(y^* + h) - J(y^*) = \int\limits_0^1 \left(2(y^*)'h' + (h')^2\right)\, dx =$$

(интегрируя по частям первое слагаемое и используя уравнение Эйлера $2(y^*)'' - \lambda x = 0$, получаем с учетом свойств функции $h(x)$)

$$= 2y^{*\prime}h\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 2(y^*)''h\,dx + \int\limits_0^1 (h')^2dx =$$

$$= -\lambda\int\limits_0^1 xh\,dx + \int\limits_0^1 (h')^2dx = \int\limits_0^1 (h')^2dx \geq 0\,.$$

`Решение получено.` То есть $y^*(x)$ доставляет целевому функционалу абсолютный минимум.

`Задача 2.2` Среди непрерывно дифференцируемых на промежутке $[a,b]$ функций $y(x) \geq 0$ таких, что $y(a) = y(b) = 0$ и имеющих график длины L, найти те, у которых на этом промежутке площадь фигуры, ограниченной графиком функции и осью Ox, максимальна.

`Решение.` Лагранжев функционал в рассматриваемой задаче будет

$$L(x,y,y',\lambda) = J(x,y,y') + \lambda H(x,y,y') =$$

$$= \int\limits_a^b y(x)\,dx + \lambda\int\limits_a^b \left(\sqrt{1+y'^2}\right)dx = \int\limits_a^b \left(y(x) + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right)dx\,.$$

Для этого функционала уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} - 1 = 0\,,$$

интегрирование которого дает

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x-C_1}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad y'(x) = \frac{x-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}}\,.$$

Откуда окончательно получаем, что

$$(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \lambda^2\,.$$

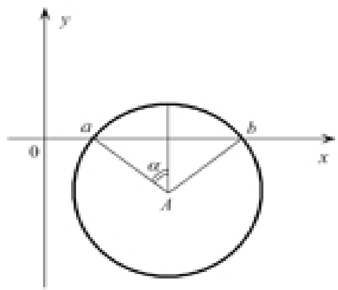

Рис. 1. К решению задачи 2.2.

Поскольку система координат ортонормированная, то полученное уравнение, определяющее искомую функцию $y(x)$, есть уравнение окружности радиуса $|\lambda|$ с центром в точке $A(C_1,\, C_2)$ и проходящей через точки с координатами $(a,\, 0)$ и $(b,\, 0)$. См. рис. 1.

Условия $y(a) = y(b) = 0$, записанные в виде

$$\begin{cases} (a - C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2\,, \\ (b - C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2\,, \end{cases}$$

дают $C_1 = \dfrac{a+b}{2}$.

Пусть угол $\angle aAb$ равен 2α. Тогда в силу свойств окружности (известных из курса элементарной геометрии) будет справедливо равенство: $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = \dfrac{b-a}{L}$.

Поскольку это уравнение (в условиях задачи) всегда однозначно разрешимо относительно α, то значения параметров λ и C_2 также однозначно могут быть найдены из соотношений $\lambda = \dfrac{2\alpha}{L}$ и $C_2 = \lambda\cos\alpha\,.$

Решение получено.

Неравенство Виртингера

В заключение отметим, что хотя очевидной альтернативой использованию достаточных условий является применение определений экстремумов функционалов, следует иметь в виду, что стандартные методы исследования на экстремум функций многих переменных в задачах вариационного исчисления могут иметь ограниченную применимость.

Проиллюстрируем эту особенность задач вариационного исчисления следующим примером.

`Теорема 2.2 (Неравенство Виртингера)`	**Пусть функция** $h(x)$ – **непрерывна на** $[0,\pi]$**,** – $h(0)=h(\pi)=0$ **и** – **имеет производную с интегрируемым квадратом на** $(0,\pi)$, **тогда справедливо неравенство**

$$I=\int\limits_0^\pi \Big(h'^2(x)-h^2(x)\Big)\;dx\geq 0\,. \qquad (2.3)$$

Отметим, что, используя аппарат функционального анализа, к заключению о справедливости неравенства (2.3) можно также прийти следующими рассуждениями.

В условиях теоремы 2.2 продолжим функцию $h(x)$ на отрезок $[-\pi,\pi]$ нечетным образом. Тогда разложения в ряд Фурье по стандартной тригонометрической системе для функций $h(x)$ и $h'(x)$ будут

$$h(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k\sin kx \qquad \text{и} \qquad h'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\,b_k\cos kx\,,$$

причем, в силу равенства Парсеваля,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} h^2(x)\;dx=\pi\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} h'^2(x)\;dx=\pi\sum_{k=1}^{+\infty} k^2b_k^2\;.$$

Функции $h^2(x)$ и $h'^2(x)$ четные по построению, поэтому

$$I = \int\limits_0^{\pi} \left(h'^2(x) - h^2(x)\right)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(h'^2(x) - h^2(x)\right)\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(k^2-1\right) b_k^2\right) \geq 0\ ,$$

поскольку $k \geq 1$.

Таким образом, тот факт, что подынтегральная функция представима в виде разности полных квадратов, вообще говоря не позволяет сделать заключение об отсутствии у функционала знаковой определенности – в данном примере функции $h(x)$ и $h'(x)$ не являются *независимыми*.