Список основных теоретических вопросов

1°. Верно ли, что каждое частное решение уравнения $y'+a(x)y=0$ представимо в виде $\exp\Big(\int\limits_x^C a(t)\,dt\Big)$, где $a(x)$ − известная непрерывная функция, а C − некоторая константа ? Ответ обосновать.

2°. Пусть $\mu(x,y)$ и $u(x,y)$ − соответственно *интегрирующий множитель* и *частное решение* для уравнения $A(x,y)\,dx+B(x,y)\,dy=0$.
Верно ли, что для любой непрерывно дифференцируемой функции одной переменной $F(u)$, функция $M(x,y)=\mu(x,y)F(u(x,y))$ также будет интегрирующим множителем данного уравнения? Ответ обосновать.

3°. Опишите метод сведения уравнения $F(x,y,y')=0$ к виду $A(x,y)\,dx+B(x,y)\,dy=0$.

4°. Дать определение *дискриминантной кривой* и *особого решения* для уравнения вида $F(x,y,y')=0$. Верно ли утверждение, что каждая дискриминантная кривая есть особое решение? Верно ли обратное утверждение? Ответы обосновать.

5°. Множество всех частных решений линейного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами образует линейное пространство. Верно ли это утверждение для *однородного* уравнения, для *неоднородного* уравнения? Ответ обосновать.

6°. Докажите утверждение: общее решение неоднородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами представимо как сумма общего решения однородного и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

7°. Найдите общее решение уравнения $y'-\lambda y=e^{\mu x}\sum\limits_{k=0}^{m}\alpha_k x^k$, где $\lambda,\ \mu,\ \alpha_k\ \ \forall k=[0,m]$ − произвольные комплексные константы и $\alpha_m\neq 0$.

8°. Для произвольного дифференциального многочлена $L(\hat{D})$ докажите, что

$$L(\hat{D})\,(e^{\lambda x}y(x))=e^{\lambda x}L(\hat{D}+\lambda)\ y(x)\,.$$

9°. Для линейного дифференциального оператора $\hat{D}=\dfrac{d}{dx}$ докажите, что

$$(\hat{D}-\lambda)^k\ (e^{\lambda x}y(x))=e^{\lambda x}y^{(k)}(x)\,.$$

10°. Докажите, что каждый квазимногочлен степени $m-1$ вида $e^{\lambda_j x}\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_{jk}x^{k-1}$ является частным решением однородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами, где λ_j. есть корень характеристического многочлена кратности m.

11°. Докажите, что каждое частное решение однородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами является квазимногочленом степени $m-1$ вида $e^{\lambda_j x}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}x^{k-1}$, где λ_j. есть корень характеристического многочлена кратности m.

12°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм выделения вещественных решений однородного уравнения порядка n с постоянными вещественными коэффициентами, основанный на переходе к вещественному базису в пространстве частных решений этого уравнения

13°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм построения частного решения неоднородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами методом *вариации постоянных*.

14°. Множество всех частных решений нормальной системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами образует линейное пространство. Верно ли это утверждение для *однородной* системы, для *неоднородной* системы? Ответ обосновать.

15°. Докажите утверждение: общее решение системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами представимо как сумма общего решения однородной и некоторого частного решения неоднородной системы уравнений.

16°. Получите и обоснуйте формулу общего решения системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами в случае существования в U^n из собственных векторов линейного преобразования, заданного матрицей системы уравнений.

17°. Дайте определение жордановой цепочки. Верно ли утверждение: все векторы, образующие жорданову цепочку линейно независимы в U^n? Ответ обосновать

18°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм построения общего решения системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами. использующего свойства жорданова базиса в U^n.

19°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм построения частного решения системы неоднородных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами методом *вариации постоянных*.

20°. Дайте определение матричной экспоненты. Сформулируйте и обоснуйте ее основные свойства.

21°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм вычисления матричной экспоненты для произвольной квадратной матрицы порядка n.