МФТИ. 2 курс. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Зачет по программе осеннего семестра

Список основных вопросов

1°. Верно ли, что каждое частное решение уравнения $y'+a(x)y=0$ представимо в виде $\exp\Big(\int\limits_x^C a(t)\,dt\Big)$, где $a(x)$ − известная непрерывная функция, а C − некоторая константа? Ответ обосновать.

2°. Пусть $\mu(x,y)$ и $u(x,y)$ − соответственно *интегрирующий множитель* и *частное решение* для уравнения $A(x,y)\,dx+B(x,y)\,dy=0$.
Верно ли, что для любой непрерывно дифференцируемой функции одной переменной $F(u)$, функция $M(x,y)=\mu(x,y)F(u(x,y))$ также будет интегрирующим множителем данного уравнения? Ответ обосновать.

3°. Опишите метод сведения уравнения $F(x,y,y')=0$ к виду $A(x,y)\,dx+B(x,y)\,dy=0$.

4°. Дать определение *дискриминантной кривой* и *особого решения* для уравнения вида $F(x,y,y')=0$. Верно ли утверждение, что каждая дискриминантная кривая есть особое решение? Верно ли обратное утверждение? Ответы обосновать.

5°. Множество всех частных решений линейного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами образует линейное пространство. Верно ли это утверждение для *однородного* уравнения, для *неоднородного* уравнения? Ответ обосновать.

6°. Докажите утверждение: общее решение неоднородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами представимо как сумма общего решения однородного и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

7°. Найдите общее решение уравнения $y'-\lambda y=e^{\mu x}\sum\limits_{k=0}^{m}\alpha_k x^k$, где $\lambda,\ \mu,\ \alpha_k\ \forall k=[0,m]$ − произвольные комплексные константы и $\alpha_m\neq 0$.

8°. Для произвольного дифференциального многочлена $L(\hat{D})$ докажите, что

$$L(\hat{D})\,(e^{\lambda x}y(x))=e^{\lambda x}L(\hat{D}+\lambda)\ y(x).$$

9°. Для линейного дифференциального оператора $\hat{D}=\dfrac{d}{dx}$ докажите, что

$$(\hat{D}-\lambda)^k\ (e^{\lambda x}y(x))=e^{\lambda x}y^{(k)}(x).$$

10°. Докажите, что каждый квазимногочлен степени $m-1$ вида $e^{\lambda_j x}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}x^{k-1}$ является частным решением однородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами, где λ_j. есть корень характеристического многочлена кратности m.

11°. Докажите, что каждое частное решение однородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами является квазимногочленом степени $m-1$ вида $e^{\lambda_j x}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{jk}x^{k-1}$, где λ_j. есть корень характеристического многочлена кратности m.

12°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм выделения вещественных решений однородного уравнения порядка n с постоянными вещественными коэффициентами, основанный на переходе к вещественному базису в пространстве частных решений этого уравнения

13°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм построения частного решения неоднородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами методом *вариации постоянных*.

14°. Множество всех частных решений нормальной системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами образует линейное пространство. Верно ли это утверждение для *однородной* системы, для *неоднородной* системы? Ответ обосновать.

15°. Докажите утверждение: общее решение системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами представимо как сумма общего решения однородной и некоторого частного решения неоднородной системы уравнений.

16°. Выведите формулу общего решения системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами в случае существования в U^n базиса, состоящего из собственных векторов линейного преобразования, заданного матрицей системы уравнений.

17°. Дайте определение *жордановой цепочки*. Верно ли утверждение: все векторы, образующие жорданову цепочку линейно независимы в U^n? Ответ обосновать

18°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм построения общего решения системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами. использующий свойства жорданова базиса в U^n.

19°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм построения частного решения системы неоднородных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами методом *вариации постоянных*.

20°. Дайте определение *матричной экспоненты*. Сформулируйте и докажите ее основные свойства.

21°. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм вычисления матричной экспоненты для произвольной квадратной матрицы порядка n.

Список дополнительных вопросов

1°. Для уравнения $y'-3\sqrt[3]{y^2}=0$ решите *краевую задачу* с условиями: $y(-2)=-1$; $y(2)=1$.

2°. Решите уравнение $y'=\dfrac{ax+by+c}{px+qy+s}$, если известно, что a,b,c,p,q,s − произвольные константы, удовлетворяющие равенству $\det\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}=0$.

3°. Для уравнения $y''+y=0$ укажите методы, понижающие его порядок. Гарантирована ли при использовании этих методов равносильность уравнения с пониженным порядком и исходного? Ответ обосновать.

4°. Пусть известно $y_0(x)$ − частное решение уравнения Риккати $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$, где непрерывные функции $a(x), b(x)$ и $c(x)$ также известны. Найдите общее решение этого уравнения.

5°. Как можно представить общее решение однородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами, используя общее решение неоднородного и некоторое частное решение неоднородного уравнения?

6°. Верно ли утверждение: множество всех частных решений однородного уравнения порядка n с постоянными коэффициентами является n-мерным линейным пространством. Ответ обосновать.

7°. Верно ли утверждение: для того, что бы вектор-функция вида $\left\| \vec{f} \right\| e^{\lambda t}$ являлась частным решением системы линейных уравнений порядка n с постоянными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы $\left\| \vec{f} \right\|$ являлся собственным вектором, отвечающим собственному значению λ, для линейного преобразования, заданного матрицей системы уравнений. Ответ обосновать.

8°. Верно ли утверждение: множество всех частных решений однородной системы уравнений порядка n с постоянными коэффициентами является n-мерным линейным пространством. Ответ обосновать.

9°. Дайте определения *жордановой клетки*, *жорданова блока* и матрицы *нормальной жордановой формы*. Как связаны их размеры?

10°. Опишите алгоритм решения однородной системы уравнений порядка n с постоянными коэффициентами, матрица которой имеет нормальную жорданову форму.

11°. Верно ли утверждение: из вводимых по определению формул $\| A \|^0 = \| E \|$ и $\| A \|^{-1} \| A \| = \| E \|$ при $\det \| A \| \neq 0$, следует свойство матричной операции возведения в степень $\| A \|^{m+k} = \| A \|^m \| A \|^k$ для любых целых m и k? Ответ обосновать.

12°. Найдите $e^{t\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$.

13°. Пусть столбцы матриц $\| X(t) \|$ и $\| Y(y) \|$ суть вектор-функции двух разных базисов в пространстве частных решений однородной системы уравнений порядка n с постоянными коэффициентами. Верно ли утверждение: в этом случае существует единственная постоянная матрица $\| S \|$ такая, что $\| Y(t) \| = \| X(t) \| \| S \|$?

Все матрицы квадратные, порядка n. Ответ обосновать.

14°. В каком виде следует искать частное решение уравнения $y^{\text{IV}} + y = e^x \sin x$, при использовании метода неопределенных коэффициентов?

15°. В каком виде следует искать частное решение уравнения $y^{\text{IV}} - y = e^x + \sin x$, при использовании метода неопределенных коэффициентов?

16°. В каком виде следует искать частное решение уравнения $y^{\text{IV}} + y'' = x \sin x$, при использовании метода неопределенных коэффициентов?

17°. В каком виде следует искать частное решение уравнения $y^{\text{IV}} + y'' = x + \sin x$, при использовании метода неопределенных коэффициентов?

18°. В каком виде следует искать частное решение уравнения $y^{\text{IV}} + y''' = xe^x \sin x$, при использовании метода неопределенных коэффициентов?

19°. В каком виде следует искать частное решение уравнения $y^{\text{IV}} + y''' = x + e^x \sin x$, при использовании метода неопределенных коэффициентов?

20°. Верно ли, что решением задачи Коши для матричного дифференциального уравнения $\left\| \dot{X} \right\| = \| A \| \| X \|$ с начальным условием $\left\| X(0) \right\| = \| E \|$ является матричная экспонента $\left\| X(t) \right\| = e^{t\| A \|}$? Ответ обосновать.

21°. Верно ли утверждение: общее решение однородной системы уравнений порядка n с постоянными коэффициентами $\left\| \dot{x} \right\| = \| A \| \| x \|$ представимо в виде: $\left\| \vec{x}(t) \right\| = e^{t\| A \|} \left\| \vec{C} \right\|$? Ответ обосновать.