# Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

| | |
|---|---|
| Определение 3.0.1 | *Нормальной системой* линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка $n \geq 2$ называется система уравнений вида $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t), \end{cases}$$ |
| | где $t \in T$, $x_k(t)$ $k = [1, n]$ – комплексно-значные непрерывно дифференцируемые неизвестные функции вещественного аргумента, а $b_k(t)$, $k = [1, n]$ – заданные, непрерывные на $T$ функции, называемые *свободными членами*. Числа $a_{ij}$ $\forall i, j = [1, n]$ – комплексные константы. |

Данную систему уравнений часто записывают в так называемом *неразвернутом* виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + b_i(t)\,,\ \forall i = [1,n]\,, \tag{3.0.1}$$

или же в еще более простой, матричной форме $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| + \|b\|$, где

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|,\ \|x\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\|,\ \|b\| = \left\| \begin{array}{c} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{array} \right\|.$$

Отметим сразу, что *задача Коши* для системы линейных уравнений (3.0.1) заключается в отыскании ее частного решения, удовлетворяющего *начальным условиям* $x_k(t_0) = x_{(0)k}$ $\forall k = [1,n]$, где $x_{(0)k},\ t_0 \in T$ – фиксированные числа. Далее (в § 4.3) будет показано, что задача Коши для системы уравнений (3.0.1) разрешима всегда и притом однозначно.

Методы решения системы уравнений (3.0.1) принципиально аналогичны методам решения линейного уравнения $n$-го порядка, поскольку линейное уравнение $n$-го порядка может быть сведено к системе вида (3.0.1) и наоборот.

# Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай базиса из собственных векторов)

Рассмотрим теперь *однородную* систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \ . \tag{3.1.1}$$

Свойства ее общего решения – совокупности всех частных решений – описываются следующим набором теорем.

Теорема 3.1.1 (Принцип суперпозиции) **Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ – частные решения системы (3.1.1), то $\|x(t)\| = C_1\|x_{(1)}(t)\| + C_2\|x_{(2)}(t)\|$ также есть ее частное решение для любых комплексных констант $C_1$ и $C_2$.**

Доказательство

Если $\|x_{(1)}(t)\|$ и $\|x_{(2)}(t)\|$ – частные решения системы (3.1.1), то справедливы равенства $\|\dot{x}_{(1)}(t)\| - \|A\|\|x_{(1)}(t)\| = \|o\|$ и $\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - \|A\|\|x_{(2)}(t)\| = \|o\|$ , где $\|o\|$ — нулевой столбец.

Имеем

$$\|\dot{x}(t)\| - \|A\|\|x(t)\| =$$

$$= C_1\|\dot{x}_{(1)}(t)\| + C_2\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - C_1\|A\|\|x_{(1)}(t)\| - C_2\|A\|\|x_{(2)}(t)\| =$$

$$= C_1\left(\|\dot{x}_{(1)}(t)\| - \|A\|\|x_{(1)}(t)\|\right) +$$

$$+ C_2\left(\|\dot{x}_{(2)}(t)\| - \|A\|\|x_{(2)}(t)\|\right) = C_1\|o\| + C_2\|o\| = \|o\| \ .$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1.1 **Множество всех частных решений однородной системы (3.1.1) образует линейное пространство.**

Доказательство

Следует из аксиоматики линейного пространства и теоремы 3.1.1.

Следствие доказано.

Предположим теперь, что $\|A\|$ – матрица системы уравнений (3.1.1) – задает в $n$-мерном унитарном пространстве $U^n$ со стандартным базисом линейный оператор (точнее, линейное преобразование) $\widehat{A}$. Напомним также, что ненулевой элемент $f \in U^n$ называется *собственным вектором* оператора $\widehat{A}$, отвечающим *собственному значению* $\lambda$, если $\widehat{A}f = \lambda f$. В координатной форме (как показывается в курсе линейной алгебры) последнее равенство будет иметь вид

$$\|\widehat{A}\|\|f\| = \lambda\|f\| \ .$$

Ответ на вопрос: «При каких $\|f\|$ и $\lambda$ частное нетривиальное решение системы (3.1.1) есть вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$?», дает

Теорема 3.1.2 **Для того, чтобы вектор-функция $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ являлась частным ненулевым решением системы (3.1.1), необходимо и достаточно, чтобы $\|f\|$ был собственным вектором, а $\lambda$ – соответствующим собственным значением линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$ в $U^n$.**

Доказательство

Пусть $\|f\|$ некоторый ненулевой столбец. Подставим $\|x(t)\| = \|f\|e^{\lambda t}$ в уравнение (3.1.1), приняв во внимание равенство $\dfrac{d}{dt}\, e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$, а также то, что $e^{\lambda t} \neq 0$, получим

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \;\Leftrightarrow\; \lambda\|f\|e^{\lambda t} = \|A\|\left(\|f\|e^{\lambda t}\right) \;\Leftrightarrow\; \|A\|\|f\| = \lambda\|f\| \,.$$

Теорема доказана.

Возможный вид общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений устанавливает

Теорема 3.1.3 **Пусть в линейном пространстве $U^n$ существует базис $\left\{\|f_{(1)}\|, \|f_{(2)}\|, \ldots, \|f_{(n)}\|\right\}$ из собственных векторов линейного преобразования, задаваемого в исходном базисе матрицей $\|A\|$, и пусть $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ соответствующие этим собственным векторам собственные значения (среди которых могут быть и равные). Тогда**

- $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$, **где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные комплексные числа, является частным решением системы (3.1.1);**
- **и каждое частное решение системы (3.1.1) может быть представлено в виде** $C_1\|f_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|f_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n\|f_{(n)}\|e^{\lambda_n t}$.

Доказательство

Справедливость первого пункта следует из теорем 3.1.1 и 3.1.2.

Докажем второй пункт. Пусть $\|x(t)\|$ некоторое частное решение системы (3.1.1). Его значение при любом фиксированном $t \in T$ может быть (в силу условия теоремы) разложено в $U^n$ по базису из собственных векторов преобразования $\|A\|$

$$\|x(t)\| = D_1(t)\|f_{(1)}\| + D_2(t)\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\|f_{(n)}\| \ . \quad (3.1.2)$$

Подставим это выражение в систему (3.1.1), получим

$$\dot{D}_1(t)\|f_{(1)}\| + \dot{D}_2(t)\|f_{(2)}\| + \ldots + \dot{D}_n(t)\|f_{(n)}\| =$$

$$= D_1(t)\|A\|\|f_{(1)}\| + D_2(t)\|A\|\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\|A\|\|f_{(n)}\| =$$

$$= D_1(t)\lambda_1\|f_{(1)}\| + D_2(t)\lambda_2\|f_{(2)}\| + \ldots + D_n(t)\lambda_n\|f_{(n)}\| \ .$$

Откуда вытекает равенство

$$\Big(\dot{D}_1(t) - \lambda_1 D_1(t)\Big)\|f_{(1)}\| + \ldots + \Big(\dot{D}_n(t) - \lambda_n D_n(t)\Big)\|f_{(n)}\| = \|o\|.$$

Наконец, в силу линейной независимости базисных элементов, из этого следует

$$\dot{D}_k(t) - \lambda_k D_k(t) = 0 \quad \forall k = [1, n] \qquad \Longrightarrow \qquad D_k(t) = C_k e^{\lambda_k t} \ ,$$

что, в сочетании с равенством (3.1.2), дает требуемый формат записи решения.

Теорема доказана.

Следствие 3.1.2 **В условиях теоремы 3.1.3, линейное пространство, образованное всеми частными решениями однородной системы (3.1.1), является $n$-мерным.**

Доказательство

Следует из определения конечномерного линейного пространства и теоремы 3.1.3.

Следствие доказано.

Таким образом, в тех случаях, когда из собственных векторов линейного преобразования $\widehat{A}$ можно образовать базис в $U^n$, общее решение системы (3.1.1) определяется теоремой 3.1.3.

В качестве *достаточных* признаков такой возможности удобно использовать следующие, доказываемые в курсе линейной алгебры, критерии.

Из собственных векторов линейного преобразования можно образовать базис в $U^n$, если

– все собственные значения $\widehat{A}$ попарно различны или;

– матрица $\|\widehat{A}\|$ эрмитовская (т.е., $\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}} \quad \forall i, j = [1, n]$) в $U^n$ (или же, в случае $E^n$, симметрическая).

Использование утверждения теоремы 3.1.3 можно проиллюстрировать следующим примером.

Задача 3.1.1 Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= & & x_2(t) & + & x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= & x_1(t) & & - & x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= & x_1(t) & - \; x_2(t). & & \end{cases}$$

Решение Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в $U^3$ матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

являющейся матрицей данной системы дифференциальных уравнений.
Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \begin{Vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{Vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0\,.$$

Или $\quad (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0\,, \quad$ откуда $\quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = 1\,.$

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений

$$\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\| \ .$$

Для собственного значения $\lambda_1 = -2$ имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0 \ , \end{array} \right.$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \| -1\ 1\ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Для собственного значения $\lambda_{2,3} = 1$, у которого кратность 2, получаем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \ \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0 \ . \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|1\ 1\ 0\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \|1\ 0\ 1\|^{\mathrm{T}}$.

Легко убедиться, что все три собственных вектора линейно независимые и образуют базис в $U^3$. Тогда, согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{-2t} + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\| e^{t} + C_3 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^{t},$$

Решение получено.

где $C_1$, $C_2$ и $C_3$ – произвольные комплексные числа.

## Выделение вещественных решений однородной системы линейных уравнений

Если матрица исходной системы уравнений вещественна, то из общего комплексного решения можно выделить вещественные решения. В этом случае невещественные корни характеристического уравнения попарно комплексно сопряжены. Комплексно сопряженными при этом окажутся и соответствующие пары решений, входящие в базис. Каждую такую пару следует заменить двумя вектор-функциями, являющимися вещественной и мнимой частью одной из вектор-функций исходной пары. То есть процедура этого выделения в точности совпадает с методом, изложенным в § 2.4, за исключением некоторых технических деталей, для иллюстрации которых достаточно рассмотреть конкретный пример.

Задача 3.1.2 Найти общее вещественное решение системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \dot{x}_1(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & - & x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t), & & \\ \dot{x}_3(t) & = & 3x_1(t) & & & + & x_3(t). \end{array}\right.$$

Решение Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в $U^3$ матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0 \implies (1-\lambda)^3+4(1-\lambda) = 0.$$

Или $(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2+4\right) = 0$, откуда $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1\pm 2i$.

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3\|^{\mathrm{T}}$. Тогда каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений $\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\|\|f\| = \|o\|$ .
Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ имеем

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \xi_2 + \xi_3 = 0 \ , \\ \xi_1 = 0 \ , \end{cases}$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \|0\ \ 1\ \ -1\|^{\mathrm{T}}$.

Для $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ достаточно найти лишь один собственный вектор, например для $\lambda_2 = 1 + 2i$, поскольку другой должен быть ему комплексно сопряженным.

Имеем

$$\left\| \begin{array}{rrr} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \xi_1 - 2i\xi_2 = 0\ . \\ 3\xi_1 - 2i\xi_3 = 0\ . \end{array} \right.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|2i\ 1\ \ 3\|^{\mathrm{T}}$ и $\|f_{(3)}\| = \|-2i\ 1\ \ 3\|^{\mathrm{T}}$

Все три собственных вектора линейно независимые (поскольку собственные значения попарно различны) и образуют базис в $U^3$ . Согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+C_2 \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} + C_3 \left\| \begin{array}{r} -2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1-2i)t},$$

где $C_1,\ C_2$ и $C_3$ – произвольные комплексные постоянные.

Пусть $\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} 2i \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^{(1+2i)t} = \operatorname{Re}\Phi(t) + i\operatorname{Im}\Phi(t)$. Найдем $\operatorname{Re}\Phi(t)$ и $\operatorname{Im}\Phi(t)$. Использовав правила действий с матрицами и формулу Эйлера, получим

$$\Phi(t) = \left( \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| + i \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \right) e^t \left(\cos 2t + i \sin 2t\right) =$$

$$= \left( \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t \cos 2t - \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| e^t \sin 2t \right) +$$

$$+i \left( \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right\| e^t \sin 2t + \left\| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| e^t \cos 2t \right) .$$

Или, сгруппировав подобные члены, найдем

$$\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + i \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ ,$$

что дает

$$\mathrm{Re}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}\Phi(t) = \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t \ .$$

Теперь общее вещественное решение может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = R_1 \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| e^t +$$

$$+R_2 \left\| \begin{array}{r} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{array} \right\| e^t + R_3 \left\| \begin{array}{r} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{array} \right\| e^t,$$

Решение получено.

где $R_1$, $R_2$ и $R_3$ – произвольные вещественные постоянные.

# Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (случай жорданова базиса)

Рассмотрим теперь процедуру построения общего решения системы уравнений (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполнены. Такая ситуация может возникнуть при наличии *кратных* корней у характеристического уравнения линейного преобразования $\widehat{A}$, задаваемого в $U^n$ матрицей $\|A\|$.

Действительно, из курса линейной алгебры известно, что размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению кратности $k$, не меньше, чем единица, но не больше, чем $k$. Поэтому максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению кратности $k \geq 2$, может оказаться строго меньше, чем $k$.

Это, в свою очередь, будет означать, что полное число линейно независимых собственных векторов линейного оператора $\|A\|$ окажется меньше $n$ — размерности $U^n$, — ибо полное число корней характеристического уравнения (с учетом их кратности) всегда равно $n$. И, следовательно, в линейном пространстве частных решений системы уравнений (3.1.1) не удается построить базис вида, указанного в формулировке теоремы 3.1.3.

Примером матрицы с подобными свойствами является квадратная матрица порядка $l \geq 2$ следующего вида

$$\|J_l(\lambda_0)\| = \left\| \begin{matrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_0 \end{matrix} \right\|. \tag{3.2.1}$$

Такую матрицу называют *жордановой клеткой* порядка $l$. У нее все элементы, стоящие на главной диагонали, одинаковы, элементы, расположенные на первой наддиагонали, равны единице, а остальные элементы — нули.

Матрица $\|J_l(\lambda_0)\|$, определяющая некоторое линейное преобразование $\widehat{J}_l$ в $U^l$, имеет единственное собственное значение $\lambda = \lambda_0$ кратности $l$, которому отвечает лишь один линейно независимый собственный вектор $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \dots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, поскольку $\mathrm{rg}\ \|\widehat{J}_l(\lambda_0) - \lambda_0\widehat{E}\| = l - 1$. Иначе говоря, размерность собственного подпространства равна единице, и базис из собственных векторов $\|J_l(\lambda_0)\|$ в $U^l$ не существует.

Здесь стоит отметить, что, во-первых, система (3.1.1) в случае, когда $\|A\| = \|J_l(\lambda_0)\|$, легко решается. Это показано в конце данного параграфа. И, во-вторых, элементы базиса в $U^l$, в котором преобразование $\|\widehat{A}\|$ имеет матрицу вида (3.2.1), должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{array}{lcl}
\|\widehat{A}\|\|h_{(1)}\| = \lambda_0\|h_{(1)}\| \,, & & \|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(2)}\| = \lambda_0\|h_{(2)}\| + \|h_{(1)}\| \,, & & \|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \,, \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(3)}\| = \lambda_0\|h_{(3)}\| + \|h_{(2)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\|\widehat{A}\|\|h_{(l)}\| = \lambda_0\|h_{(l)}\| + \|h_{(l-1)}\| & & \|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \,.
\end{array} \tag{3.2.2}$$

Действительно, согласно определению матрицы линейного преобразования, ее столбцами (в некотором конкретном базисе $\{\, \|h_{(1)}\|, \|h_{(2)}\|, \dots, \|h_{(l)}\| \,\}$) являются координатные столбцы *образов базисных элементов*. Тогда, учитывая структуру матрицы (3.2.1), мы приходим к формулам (3.2.2).

Теперь покажем, что в пространстве частных решений системы (3.1.1) возможно построить базис, позволяющий описать ее общее решение, добавив к собственным векторам $\|A\|$ дополнительные элементы пространства $U^n$, определяемые формулами (3.2.2).

Рассмотрим эту процедуру подробнее. Пусть $\lambda_0$ – собственное значение, а $\|h_{(1)}\|$ – соответствующий ему собственный вектор линейного преобразования $\|\widehat{A}\|$, действующего в $U^n$. Тогда можно дать

**Определение 3.2.1**

Элементы $\|h_{(1)}\|$, $\|h_{(2)}\|$, $\ldots$ , $\|h_{(l)}\|$, принадлежащие $U^l$ и являющиеся решениями уравнений

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \,, \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \,,
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

в то время как уравнение

$$\|\widehat{A} - \lambda_0\widehat{E}\|\|h_{(l+1)}\| = \|h_{(l)}\|$$

решений не имеет, называются *жордановой цепочкой* длиной $l$, начинающейся с собственного вектора $\|h_{(1)}\|$.

Элементы $\|h_{(2)}\|$, $\|h_{(3)}\|$, $\ldots$ , $\|h_{(l)}\|$ называются *присоединенными векторами* к вектору $\|h_{(1)}\|$.

Например (покажите это самостоятельно), жорданова цепочка, построенная для матрицы вида (3.2.1) с начальным собственным вектором $\|f\| = \|1\ 0\ 0\ \ldots\ 0\|^{\mathrm{T}}$, является стандартным базисом в линейном пространстве $U^l$.

Заметим также, что уравнения (3.2.3) можно записать в других формах, а именно: если обозначить $\|\widehat{B}\| = \|\widehat{A} - \lambda_0 \widehat{E}\|$, то в виде

$$
\begin{array}{lll}
\|\widehat{B}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|\|h_{(1)}\| = \|o\| \,, \\
\|\widehat{B}\|\|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^2\|h_{(2)}\| = \|o\| \,, \\
\|\widehat{B}\|\|h_{(3)}\| = \|h_{(2)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^3\|h_{(3)}\| = \|o\| \,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\|\widehat{B}\|\|h_{(l)}\| = \|h_{(l-1)}\| \,, & \Longrightarrow & \|\widehat{B}\|^l\|h_{(l)}\| = \|o\| \,.
\end{array}
\tag{3.2.4}
$$

Опишем теперь основные свойства жордановых цепочек.

Теорема 3.2.1 **Множество элементов в $U^l$, являющихся**
**– какой-либо жордановой цепочкой;**
**– либо объединением нескольких различных жордановых цепочек,**
**линейно независимое.**

Доказательство

Докажем первое утверждение.

Из соотношений (3.2.4) следует, что

$$\|\widehat{B}\|^s \|h_{(s+1)}\| = \|h_{(1)}\| \quad \forall s = [1, l-1]$$

и (3.2.5)

$$\|\widehat{B}\|^r \|h_{(s+1)}\| = \|o\| \quad \forall r > s,\ \forall s = [1, l-1]\ ,$$

поскольку результат умножения матрицы $\|\widehat{B}\|$ на присоединенный вектор есть или присоединенный вектор с номером на единицу меньшим, или же нулевой столбец. Действительно, $\forall s = [1, l-1]$ :

$$\|\widehat{B}\|^s \|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1} \|\widehat{B}\| \|h_{(s+1)}\| = \|\widehat{B}\|^{s-1} \|h_{(s)}\| = \ldots$$

$$\ldots = \|\widehat{B}\|^2 \|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\| \|\widehat{B}\| \|h_{(3)}\| = \|\widehat{B}\| \|h_{(2)}\| = \|h_{(1)}\|\ .$$

Пусть

$$C_1\|h_{(1)}\| + C_2\|h_{(2)}\| + \ \dots \ + C_l\|h_{(l)}\| = \|o\| \ .$$

Покажем, что в этом случае линейная комбинация в левой части равенства тривиальная.

Действительно, умножив обе части равенства на $\|\widehat{B}\|^{l-1}$, получим

$$\|\widehat{B}\|^{l-1}\left(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\|h_{(2)}\| + \ \dots \ + C_l\|h_{(l)}\|\right) = \|o\| \ ,$$

$$C_1\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(1)}\| + C_2\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(2)}\| + \ \dots \ + C_l\|\widehat{B}\|^{l-1}\|h_{(l)}\| = \|o\|$$

или (с учетом (3.2.5)):

$$C_l\|h_{(1)}\| = \|o\| \quad \Longrightarrow \quad C_l = 0 \ .$$

Затем, подставив $C_l = 0$ и умножив обе части на $\|\widehat{B}\|^{l-2}$, получим

$$C_{l-1}\|h_{(1)}\| = \|o\| \quad \Longrightarrow \quad C_{l-1} = 0$$

и т.д.

А из тривиальности рассматриваемой линейной комбинации следует справедливость первого утверждения теоремы.

Наконец, поскольку векторы $\|h_{(1)}\|$ *из всех* жордановых цепочек линейно независимы в своей совокупности, то оказывается справедливым и второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

В курсах линейной алгебры также доказывается, важная для рассматриваемой задачи,

Теорема 3.2.2 (Жордана) **Для любого линейного преобразования $\widehat{A}$ в $U^n$ существует базис (называемый *жордановым*), образованный из всех жордановых цепочек для всех попарно различных собственных значений этого преобразования.**

| | |
|---|---|
| Определение 3.2.2 | *Жордановым блоком*, отвечающим собственному значению $\lambda_0$ кратности $k$ с $q$-мерным собственным подпространством, назовем квадратную порядка $k$ блочно-диагональную матрицу $\|J(\lambda_0)\|$ вида $$\left\| \begin{array}{cccc} \|J_{l_1}(\lambda_0)\| & \| O \| & \dots & \| O \| \\ \| O \| & \|J_{l_2}(\lambda_0)\| & \dots & \| O \| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \| O \| & \| O \| & \dots & \|J_{l_q}(\lambda_0)\| \end{array} \right\| ,$$ где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы $\|J_{l_1}\|$, $\|J_{l_2}\|$, $\dots$, $\|J_{l_q}\|$ суть жордановы клетки вида (3.2.1), отвечающие собственному значению $\lambda_0$ и каждому из $q$ линейно независимых собственных векторов, начинающих соответствующие жордановы цепочки, имеющих длины $l_1$, $l_2$, $\dots$ $l_q$ .<br>Через $\| O \|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера. |

Отметим, что при этом сумма порядков (размеров) жордановых клеток в блоке равна кратности собственного значения $\lambda_0$, то есть

$$l_1 + l_2 + \dots + l_q = k \ .$$

Например, жордановы блоки с $k = 4$ и $q = 2$ могут иметь вид

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{array} \right\| .$$

Пусть линейное преобразование $\|\widehat{A}\|$, действующее в $U^n$, заданное матрицей $\|A\|$, имеет характеристический многочлен вида

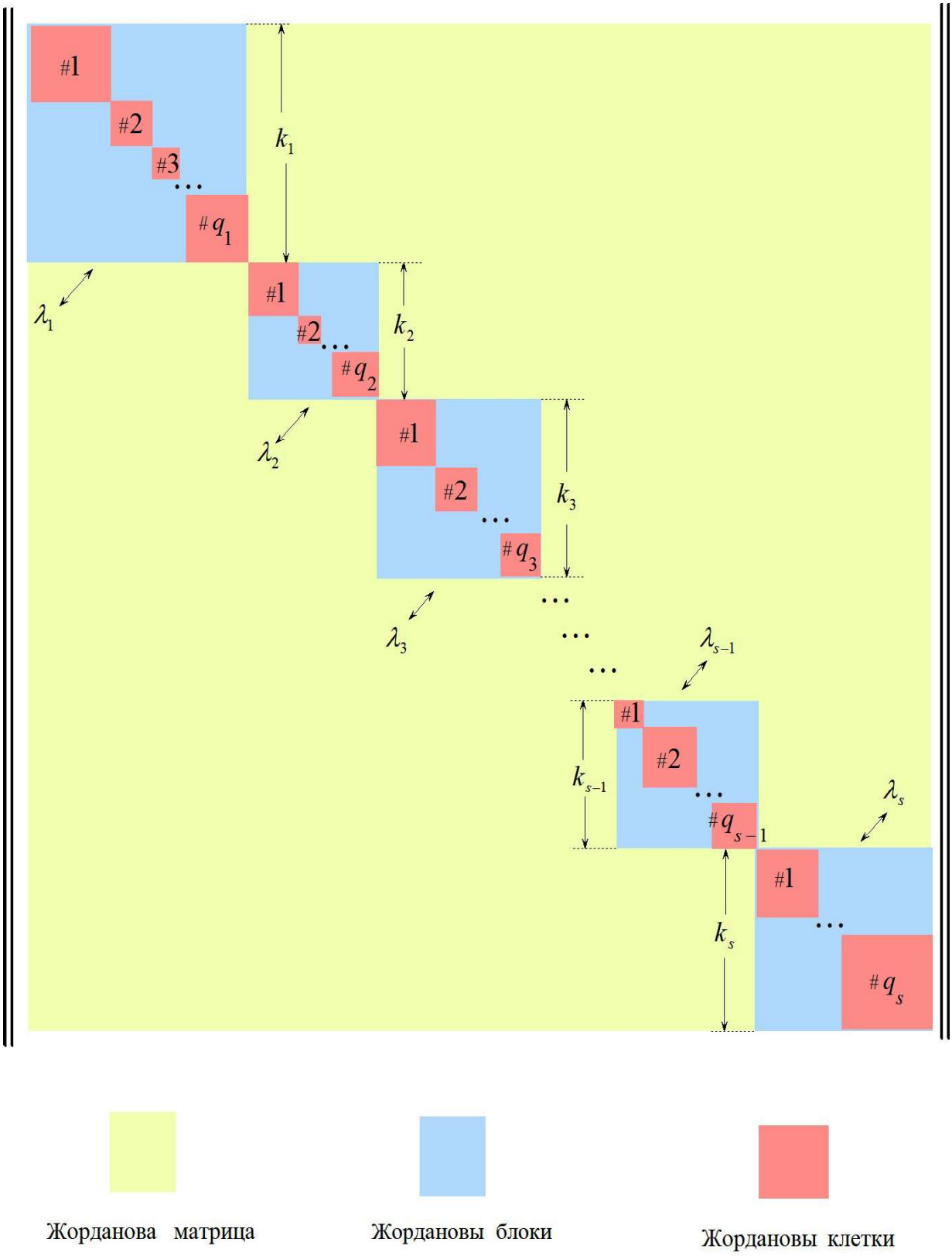
$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{k_s} \ ,$$

причем $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $j \neq i$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$.

| | |
|---|---|
| Определение 3.2.3 | Будем говорить, что матрица $\|A\|$ имеет *нормальную жорданову форму*, если она записана в блочно-диагональном виде (см. рис. 3.1): $$\|A\| = \left\| \begin{matrix} \|J(\lambda_1)\| & \| O \| & \ldots & \| O \| \\ \| O \| & \|J(\lambda_2)\| & \ldots & \| O \| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \| O \| & \| O \| & \ldots & \|J(\lambda_s)\| \end{matrix} \right\| ,$$ где расположенные на главной диагонали квадратные подматрицы $$\|J(\lambda_1)\|, \ \|J(\lambda_2)\|, \ \ldots \ \|J(\lambda_s)\|$$ являются жордановыми блоками, отвечающими попарно различным собственным значениям преобразования $\widehat{A}$, а через $\| O \|$ обозначены нулевые подматрицы подходящего размера. |

Резюмируя определения (3.2.1) – (3.2.3), можно сказать, что матрица имеет нормальную жорданову форму, если у нее на главной диагонали расположены $m$ жордановых блоков, где $m$ – число различных собственных значений матрицы $\|A\|$, а остальные элементы – нули.

При этом жорданов блок с номером $j$ есть квадратная подматрица порядка $k_j$, ( $k_j$ – кратность $\lambda_s$) состоящая из $q_j$ жордановых клеток, где $q_j$ – максимальное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих $\lambda_j$, равное размерности его собственного подпространства. На главной диагонали каждого блока расположено $\lambda_j$ – собственное значение, которому этот блок соответствует.




*Здесь символ # означает номер клетки в блоке*

Рис. 1. Нормальная жорданова форма матрицы

Для матрицы $\|A\|$ в жордановой форме будут справедливы следующие утверждения.

1°. Число ее жордановых блоков равно числу различных собственных значений матрицы $\|A\|$.

2°. Размер каждого блока равен кратности собственного значения, соответствующего этому блоку. Сумма размеров всех блоков равна $n$ – размеру матрицы $\|A\|$.

3°. Число жордановых клеток в жордановом блоке равно размерности собственного подпространства собственного значения, соответствующего этому блоку, и равно числу жордановых цепочек, начинающихся с различных линейно независимых собственных векторов этого подпространства.

4°. Сумма размеров всех жордановых клеток в жордановом блоке равна размеру этого блока, то есть кратности собственного значения, соответствующего данному блоку.

Теорема 3.2.3 **Матрица каждого линейного преобразования в $U^n$ имеет в жордановом базисе нормальную жорданову форму.**

Доказательство

По определению столбцами матрицы линейного оператора в конкретном базисе служат координатные представления образов базисных элементов.

Пусть базис жорданов и состоит из объединения всех жордановых цепочек, отвечающих собственным значениям матрицы $\|A\|$, то есть имеет вид

$$\left\{ \dots\ ,\ \|h_{(s1)}\|,\ \|h_{(s2)}\|,\ \dots\ ,\|h_{(sl)}\|\ ,\ \dots \right\},$$

где $s$ – номер цепочки. Тогда первый из наборов равенств (3.2.2) можно рассматривать как координатные разложения образов базисных элементов по жорданову базису, которые существуют и единственны.

Значит, координатное представление образа каждого базисного элемента является столбцом, у которого все компоненты нулевые, за исключением одного, равного $\lambda_{0s}$, или двух, равных 1 и $\lambda_{0s}$ соответственно.

Следовательно, матрица $\|A\|$ в жордановом базисе имеет жорданову форму.

Теорема доказана.

Теоремы 3.2.2 (Жордана) и 3.2.3 в совокупности утверждают, что для любого линейного преобразования в $U^n$ имеется жорданов базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, то есть состоит из жордановых клеток вида (3.2.1), расположенных вдоль главной диагонали.

Воспользуемся этим фактом для решения однородной системы (3.1.1) в случае, когда условия теоремы 3.1.3 не выполняются.

Пусть невырожденная матрица

$$\|S\| = \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{matrix} \right\|$$

есть матрица перехода от исходного базиса в $U^n$ к жорданову базису.

Тогда матрица $\|J\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|$ будет иметь жорданову форму, причем (как показывается в курсе линейной алгебры) характеристические многочлены у матриц $\|J\|$ и $\|A\|$ одинаковые. А, значит, корни их характеристических уравнений одинаковые и одинаковой кратности.

Выполнив замену неизвестных в системе $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$ по формуле

$$\|\,x(t)\| = \|S\|\|\,y(t)\| \quad \text{или} \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\, y_j(t) \quad \forall i = [1, n], \qquad (3.2.6)$$

получим $\|S\|\|\dot{y}\| = \|A\|\|S\|\|y\|$ или $\|\dot{y}\| = \|S\|^{-1}\|A\|\|S\|\|y\|$, и окончательно

$$\|\dot{y}\| = \|J\|\|y\|, \qquad (3.2.7)$$

где $\|J\|$ — жорданова матрица.

Система уравнений (3.2.7) имеет блочно-диагональную матрицу. Поэтому решения $y(t)$ можно искать для каждой жордановой клетки отдельно. Например, для самой первой клетки, положив $\lambda = \lambda_1$ и $l = l_1$, имеем (с учетом (3.2.4)) подсистему вида

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dots \\ \dot{y}_{l-1} \\ \dot{y}_l \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_{l-1} \\ y_l \end{array} \right\|$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2\ , \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3\ , \\ \dot{y}_3 = \lambda y_3 + y_4\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{l-1} = \lambda y_{l-1} + y_l\ , \\ \dot{y}_l = \lambda y_l\ . \end{array} \right.$$

Последнюю систему удобнее решать сделав предварительно подстановку

$$y_j(t) = e^{\lambda t} u_j(t) \ \ \forall j = [1, l].$$

В этом случае для $u_j(t)$ $\forall j = [1, l]$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) \ , \\ \dot{u}_2(t) = u_3(t) \ , \\ \dot{u}_3(t) = u_4(t) \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{u}_{l-1}(t) = u_l(t) \ , \\ \dot{u}_l(t) = 0 \ . \end{cases}$$

Решив эту систему, начиная с последнего уравнения, найдем, что

$$u_l(t) = C_l \ ,$$

$$u_{l-1}(t) = C_l t + C_{l-1} \ ,$$

$$u_{l-2}(t) = C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2} \ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_1(t) = C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1 \ .$$

Откуда

$$\begin{aligned} & y_l(t) = C_l e^{\lambda t} \ , \\ & y_{l-1}(t) = \Big(C_l t + C_{l-1}\Big) e^{\lambda t} \ , \\ & y_{l-2}(t) = \left(C_l \frac{t^2}{2} + C_{l-1} t + C_{l-2}\right) e^{\lambda t} \ , \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & y_1(t) = \left(C_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + C_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \ldots + C_2 \frac{t}{1!} + C_1\right) e^{\lambda t} \ . \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Проведя аналогичные вычисления для всех клеток во всех жордановых блоках, получим общее решение системы уравнений (3.2.7). Переход к исходным неизвестным выполняется по формулам (3.2.6), которые позволяют получить общее решение системы (3.1.1), итоговый вид которого определяет

Теорема 3.2.4 **Общее решение однородной системы (3.1.1) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид**

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{q} P_{ij}(t) e^{\lambda_j t} \quad \forall i = [1, n] \ ,$$

**где** $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_q$ **— все** *попарно различные* **собственные значения преобразования, заданного матрицей** $\|A\|$, **а** $P_{ij}(t)$ **— алгебраический многочлен:**

- **степень которого на единицу меньше максимальной из длин жордановых цепочек, отвечающих собственному значению** $\lambda_j$ ;
- **и коэффициенты которого зависят от** $n$ **произвольных комплексных постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_n$ .

Заметьте, что набор констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$ должен быть *одинаков* для всех многочленов $P_{ij}(t)$ .

В заключение обсуждения вопроса о построении общего решения системы (3.1.1) сделаем некоторые замечания.

Во-первых, из теоремы 3.2.4 следует, что общее решение системы (3.1.1) можно искать методом неопределенных коэффициентов, формально не прибегая к построению жорданова базиса. Возможный вариант такого подхода описан в приложении. Во-вторых, в случае вещественной матрицы $\|A\|$ выделение вещественного решения выполняется тем же методом, что был рассмотрен в § 3.1.

Наконец, для задач с невысокой размерностью, которые часто встречаются в приложениях, целесообразно использовать итоговые формулы (3.2.8) для общих решений, записанные в удобном для запоминания формате. Приведем их в исходных переменных (без вывода) для $n = 2,\ 3$, исключая случаи, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1.3.

Пусть $n = 2$ и $\lambda$ есть двукратное собственное значение, у которого собственное подпространство одномерное. Тогда общее решение системы (3.1.1) можно представить в виде

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right)e^{\lambda t}\ , \tag{3.2.9}$$

где $\|h_{(1)}\|$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda$, а $\|h_{(2)}\|$ – присоединенный к нему вектор, найденный по формулам (3.2.2).

Пусть теперь $n = 3$. В случае, когда $\lambda_1$ простое и ему отвечает собственный вектор $\|h_{(1)}\|$, а $\lambda_2$ двукратное с собственным вектором $\|h_{(2)}\|$ и присоединенным $\|h_{(3)}\|$, формула общего решения такова:

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda_1 t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda_2 t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda_2 t}\ .$$

Если в трехмерной задаче кратность собственного значения $\lambda$ равна трем, то возможны два случая.

Или размерность собственного подпространства есть два, и жордановых цепочек две, одна из которых состоит лишь из собственного вектора $\|h_{(1)}\|$, а вторая состоит из собственного вектора $\|h_{(2)}\|$ и присоединенного $\|h_{(3)}\|$, тогда решение имеет вид

$$\|x(t)\| = C_1\|h_{(1)}\|e^{\lambda t} + C_2\|h_{(2)}\|e^{\lambda t} + C_3\left(\|h_{(2)}\|t + \|h_{(3)}\|\right)e^{\lambda t}\ .$$

Или же размерность собственного подпространства с собственным вектором $\|h_{(1)}\|$ равна единице, то в единственной жордановой цепочке будут два присоединенных к $\|h_{(1)}\|$ вектора $\|h_{(2)}\|$ и $\|h_{(3)}\|$. Общее решение в этом случае дается формулой

$$\|x(t)\| = \Bigg(C_1\|h_{(1)}\| + C_2\left(\|h_{(1)}\|t + \|h_{(2)}\|\right) + \\ + C_3\left(\|h_{(1)}\|\frac{t^2}{2!} + \|h_{(2)}\|\frac{t}{1!} + \|h_{(3)}\|\right)\Bigg)e^{\lambda t}\ .$$

Во всех формулах $C_1$, $C_2$ и $C_3$ – произвольные комплексные константы.

Следует заметить, что использование теоремы Жордана возможно потребует бóльших вычислительных ресурсов, чем представляется изначально.

Дело в том, что жорданова цепочка, вообще говоря, может начинаться не с любого собственного вектора, отвечающего конкретному собственному значению. Например, в $U^3$ линейное преобразование, заданное матрицей

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

имеет троекратное нулевое собственное значение и, соответствующее ему, двумерное собственное подпространство.

Убедитесь непосредственной проверкой, что для собственного вектора $\|1\ 0\ 0\|^{\mathrm{T}}$ присоединенные векторы существуют, а для $\|0\ 1\ 0\|^{\mathrm{T}}$ — не существуют. То есть для построения жордановой цепочки предварительно надо найти те собственные векторы, для которых уравнения (3.2.2) разрешимы.