Элементы операционного исчисления

Операционное исчисление, или *метод Хевисайда*, является одним из наиболее эффективных методов решения задачи Коши линейных дифференциальных уравнений (и систем уравнений) с постоянными коэффициентами. Приведем его краткое описание.

Определение 3.5.1	*Оригиналом* называется функция $f(t)$ такая, что 1° $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и при $t \geq 0$, она непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек; 2° для $f(t)$ существуют константы $M > 0$ и $\mu \geq 0$ такие, что $$\lvert f(t)\rvert \leq Me^{\mu t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Определение 3.5.2	Функция $F(p)$ (зависящая от комплексной переменной p) вида $$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t)\,dt \qquad (3.5.1)$$ называется *изображением* функции $f(t)$ или же *преобразованием Лапласа функции* $f(t)$, что кратко записывается как $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Сформулируем основные свойства преобразования Лапласа в виде следующего набора утверждений.

Лемма 3.5.1 **В условиях определения 3.5.1 несобственный интеграл (3.5.1) очевидно сходится в комплексной полуплоскости** $\operatorname{Re} p > \mu$**.**

Доказательство

Справедливость утверждения леммы вытекает из следующей оценки. При $\mu - \operatorname{Re} p < 0$ имеем

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t)\,dt \right| \le M \int\limits_0^{+\infty} e^{(\mu - \operatorname{Re} p)t} dt < +\infty\ .$$

Лемма доказана.

Лемма 3.5.2 **Несобственный интеграл (3.5.1) является в области своего существования бесконечно дифференцируемой функцией.**

Доказательство

Обоснование утверждения леммы основано на определении производной от функции комплексного переменного и потому рассматривается в курсе ТФКП.

Лемма доказана.

Теорема 3.5.1 **Преобразование Лапласа линейно.**

Доказательство

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $g(t) \risingdotseq G(p)$, а α и β постоянные, тогда, в силу линейности операции интегрирования,

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p) \ .$$

Теорема доказана.

Теорема 3.5.2 **Пусть** $f^{(m)}(t)\ \ \forall m = 0, 1, 2, \ldots, k$ **– оригиналы, тогда**

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \ldots - p\, f^{(k-2)}(+0) - f^{(k-1)}(+0)\,.$$

Доказательство

Пусть $k = 1$, тогда, интегрируя по частям и используя определения 3.5.1 и 3.5.2, получаем

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f'(t)\,dt =$$

$$= e^{-p\,t} f(t)\Big|_{+0}^{+\infty} + \ p \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t)\,dt \ \ = \ \ p\,F(p) - f(+0)\,.$$

Применим индукцию. Пусть доказываемая формула верна для $k = m$. Покажем, что тогда она будет верна и для $k = m + 1$. Действительно, пусть $g(t) = f^{(m)}(t)$, тогда

$$f^{(m+1)}(t) = g'(t) \risingdotseq pG(p) - g(+0) =$$

$$= p\left(p^m F(p) - p^{m-1} f(+0) - \ldots - f^{(m-1)}(+0)\right) - f^{(m)}(+0)\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.5.3 **Для любого** $s > 0$ $\quad f(t-s) \risingdotseq e^{-p\,s} F(p)$ **.**

Доказательство

Поскольку $f(t-s) \equiv 0$ при $t < s$, то, сделав замену переменной $t - s = u$, получим

$$f(t-s) \risingdotseq \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,t} f(t-s)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\,(u+s)} f(u)\,du = e^{-p\,s} F(p)\ .$$

Теорема доказана.

Из определения 3.5.2 следует, что изображение для каждого оригинала существует и единственно. При этом естественно возникает вопрос: всегда ли по изображению можно восстановить оригинал? Ответ на этот вопрос дает доказываемая в курсе ТФКП

Теорема 3.5.4 **Оригинал по изображению восстанавливается единственным образом, с точностью до значений в точках разрывов, и определяется формулой**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{w \to +\infty} \int\limits_{c-iw}^{c+iw} e^{tp} F(p)\, dp\,. \tag{3.5.2}$$

В формуле (3.5.2) интеграл берется на комплексной плоскости по любой прямой $\operatorname{Re} z = c > \mu$.

Рассмотрим теперь применение операционного исчисления для решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(t) \qquad (3.5.3)$$

(или $L(\widehat{D})y(t) = b(t)$) с комплексными постоянными коэффициентами в случае, когда $b(t)$ есть квазимногочлен при $t \geq 0$. Начальные условия будем считать известными:

$$y(+0) = C_1,\ y'(+0) = C_2,\ y''(+0) = C_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(+0) = C_n\ . \quad (3.5.4)$$

Согласно теоремам 2.5.1 и 2.5.2, $y(t)$ – каждое решение этого уравнения для неотрицательных t – также есть квазимногочлен. Доопределим значения функций $b(t)$ и $y(t)$ тождественными нулями при $t < 0$. Тогда эти функции являются некоторыми оригиналами, поскольку пункт 2° определения 3.5.1 выполняется для квазимногочленов очевидным образом.

Пусть $b(t) \risingdotseq B(p)$ и $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Применяя преобразование Лапласа (в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > \mu$, то есть в которой оно существует) к обеим частям уравнения (3.5.3) и учитывая условия (3.5.3), в силу теоремы 3.5.2 получаем

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) Y(p) - H(p) = B(p)$$

или

$$L(p)Y(p) - H(p) = B(p)\ , \tag{3.5.5}$$

где $\quad H(p) = p^{n-1}C_1 + p^{n-2}C_2 + \ldots + p\, C_{n-1} + C_n +$

$$+a_1\left(p^{n-2}C_1 + p^{n-3}C_2 + \ldots + p\, C_{n-2} + C_{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}C_1\ .$$

Уравнение (3.5.5) относительно $Y(p)$ линейное и алгебраическое. Его решение при $\mathrm{Re} p > \mu$ есть

$$Y(p) = \frac{B(p) + H(p)}{L(p)}\ .$$

Хотя оригинал $y(t)$ по найденному изображению $Y(p)$ можно получить при помощи формулы (3.5.2), удобнее поступить иначе: воспользоваться взаимной однозначностью связи оригиналов и отображений, допускающей «подбор» решений при помощи табл. 3.5.1, основой которой служит

Лемма 3.5.3 **Для каждого целого неотрицательного k справедливо равенство**

$$t^k e^{\lambda t} \doteqdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}} \, .$$

Доказательство

Интегрируя изображение последовательно k раз по частям, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt =$$

$$= \frac{e^{(\lambda-p)t}}{\lambda-p} t^k \Bigg|_0^{+\infty} + \quad \frac{k}{p-\lambda} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^{k-1} dt =$$

$$= \frac{k}{p-\lambda} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^{k-1} dt = \ldots = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}} \, .$$

Лемма доказана.

Таблица 3.5.1

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$t^k e^{\lambda t}$, $k=0,1,2,\ldots$	$\dfrac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$\dfrac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arcctg} p$	$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

Содержимое табл. 3.5.1 получается из формулы, полученной в лемме 3.5.3, и формулы Эйлера $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$. Функция $Y(p)$ дробно-рациональная и всегда может быть разложена на простейшие дроби, подобные представленным в табл. 3.5.1.

Наконец, линейность преобразования Лапласа и взаимная однозначность сопоставления оригинала и изображения позволяют находить решение как уравнения (3.5.3) для любого квазимогочлена $b(t)$ (равно как и для некоторых других элементарных функций), так и системы линейных дифференциальных уравнений.

Заметим также, что в случае, когда начальные условия не заданы, операционный метод дает *общее решение* уравнения (3.5.3), выраженное через n произвольных комплексных констант $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$.

Следующие примеры демонстрируют практическую эффективность операционного метода.

Задача 3.5.1 Решить задачу Коши:

$$x'' + \omega_0^2\, x = A\cos\omega t\ ,$$

при

$$x(0) = x'(0) = 0\ ,$$

где $\omega_0 > 0,\ \omega > 0$ и $A \neq 0$ – некоторые константы.

Решение

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Воспользовавшись табл. 3.5.1 и приравняв изображения от обеих частей данного уравнения, получим

$$\left(p^2+\omega_0^2\right) X(p) = \frac{Ap}{p^2+\omega^2}\,.$$

Откуда $X(p) = \dfrac{Ap}{\left(p^2+\omega_0^2\right)\left(p^2+\omega^2\right)}$.

Если $\omega \neq \omega_0$ (то есть если мы имеем *нерезонансный* случай), то, разложив найденное изображение на простейшие дроби

$$X(p) = \frac{A}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2} - \frac{p}{p^2+\omega_0^2}\right)\,,$$

из табл. 3.5.1 получаем

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right)\,.$$

Если же $\omega = \omega_0$ (*резонансный* случай), то

$$X(p) = \frac{Ap}{\left(p^2+\omega_0^2\right)^2}\,,$$

и опять-таки по табл. 3.5.1 находим, что

Решение получено.

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0}\, t\, \sin\omega_0 t\,.$$

Задача 3.5.2

Решить задачу Коши для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = \ 3x + 4y + \ \ e^{-t} \end{cases}$$

при

$$x(0) = y(0) = -1 \ .$$

Решение

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$ и $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Поскольку собственные числа основной матрицы системы $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, то изображения неизвестных будут существовать (покажите это самостоятельно!) в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > 2 = \max\{-1,\ 1,\ 2\}$.

Применив преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения системы, получим

$$\begin{cases} p\,X - (-1) = -X - 2Y + \dfrac{2}{p+1}\,, \\ p\,Y - (-1) = \ \ 3X + 4Y + \dfrac{1}{p+1}\,. \end{cases}$$

Следовательно, для изображений неизвестных мы имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (p+1)X + 2Y = -\dfrac{p-1}{p+1}\,, \\ -3X + (p-4)Y = -\dfrac{p}{p+1}\,, \end{cases}$$

решения которой легко находятся и имеют вид

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{-p^2+7p-4}{(p+1)(p^2-3p+2)}\,, \\ Y(p) = \dfrac{-p^2-4p+3}{(p+1)(p^2-3p+2)}\,. \end{cases}$$

Разложение этих изображений на простейшие дроби дает

$$\begin{cases} X(p) = -\dfrac{2}{p+1} - \dfrac{1}{p-1} + \dfrac{2}{p-2}\,, \\ Y(p) = \quad \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{3}{p-2}\,. \end{cases}$$

Наконец, используя линейность преобразования Лапласа и табл. 3.5.1, по полученным изображениям восстанавливаем оригиналы искомых функций, которые являются решением задачи Коши:

Решение получено.

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{-t} - e^{t} + 2e^{2t}\,, \\ y(t) = \quad e^{-t} + e^{t} - 3e^{2t}\,. \end{cases}$$