

## Устойчивость положения равновесия автономной системы

Было отмечено, что достижение особых точек при движении по фазовым траекториям возможно лишь при  $t \rightarrow \infty$ . Это означает, что изучение поведения решений системы (6.1.1) в окрестностях таких точек требует исследования их поведения при  $t \rightarrow \infty$ . Одним из самых важных пунктов этого исследования является ответ на вопрос: в каких случаях малые изменения начальных условий для системы (6.1.1) приводят к малым изменениям решений на полубесконечных интервалах  $(-\infty, \underline{\Delta})$  и  $(\overline{\Delta}, +\infty)$ . Получением ответа на этот вопрос и занимается *математическая теория устойчивости*.

Пусть  $x(t, a)$  есть решение задачи Коши

$$\dot{x} = F(x), \quad x(t_0) = a \in \Omega, \quad (6.2.1)$$

такое, что  $x(t, a) \forall t \in T$  целиком находится в некоторой окрестности  $x_0$  – положения равновесия (особого решения) системы (6.1.1), т.е. точки, для которой  $F(x_0) = 0$ .

Дадим следующие определения:

**Определение**  
6.2.1

Положение равновесия  $x_0$  называется *устойчивым по Ляпунову* (или просто *устойчивым*), если

1°. Найдется  $\Delta > 0$  такое, что решение  $x(t, a)$  задачи (6.2.1) существует на  $T$  для любых  $a$  таких, что  $|a - x_0| < \Delta$ .

2°.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  такое, что, если

$$|a - x_0| < \delta_\varepsilon,$$

то  $|x(t, a) - x_0| < \varepsilon \quad \forall t \in T$ .

Иначе положение равновесия будем называть *неустойчивым*.

Определение  
6.2.2

Положение равновесия  $x_0$  называется *асимптотически устойчивым*, если

1°. Оно устойчиво по Ляпунову.

2°. При достаточно малых  $|a - x_0|$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, a) = x_0.$$

Для данных определений сделаем следующие замечания.

Во-первых, мы рассматриваем устойчивость по отношению лишь к *малым* отклонениям от положений равновесия.

Во-вторых, использование одних лишь определений 6.2.1 и 6.2.2 для исследования устойчивости эффективно в тех случаях, когда возможно либо построение общего решения, либо выявление таких свойств решений, как ограниченность, возрастание или убывание.

Следует также обратить внимание, что пункты 1° и 2° в определении 6.2.2 независимы: из 1° не следует 2°, а из 2° не следует 1°. Эту особенность определения 6.2.2 иллюстрируют пример 6.1.1 и

**Пример 6.2.1** Устойчиво ли нулевое решение уравнения  $\dot{x} = -x^2$  ?

**Решение .** Очевидно, что  $x(t) = 0$  есть решение данного уравнения. Общее ненулевое решение описывается формулой

$$x(t) = \frac{1}{t + C},$$

где  $C$  – произвольная константа.

Заметим, что хотя  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , устойчивым нулевое решение не является.

Действительно, при  $t = -C$  интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту и  $\forall C < 0$  из условия  $|x(0)| < \delta$  условие  $|x(t)| < \varepsilon$  при  $t \in (0, +\infty)$  следовать не будет.

**Решение**  
получено .

Нами были получены формы общего решения систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим теперь проблему устойчивости положений равновесия для систем (6.1.1) вида

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|, \quad (6.2.2)$$

$$\text{где } \|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \|x\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\|.$$

Здесь числа  $a_{ij}$  – комплексные константы.

Пусть матрица  $\|A\|$  задает линейное преобразование в унитарном пространстве  $U^n$ , имеющее собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , среди которых, быть может, имеются равные.

Тогда для положения равновесия  $x(t) = o$  справедлива

- Теорема 6.2.1
- 1°. Если  $\operatorname{Re}\lambda_j < 0 \quad \forall j = [1, n]$ , то  $x(t) = o$  асимптотически устойчиво.
  - 2°. Если  $\operatorname{Re}\lambda_j \leq 0 \quad \forall j = [1, n]$  и для каждого  $\lambda$  с  $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$  его кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, то  $x(t) = o$  устойчиво по Ляпунову.
  - 3°. Если имеется хотя бы одно  $\lambda$  с  $\operatorname{Re}\lambda > 0$  или хотя бы для одного  $\lambda$  с  $\operatorname{Re}\lambda = 0$  кратность больше размерности собственного подпространства, то  $x(t) = o$  неустойчиво.

Доказательство .

По теореме 3.2.4 общее решение системы (6.2.2) есть вектор-функция, каждая компонента которой имеет вид

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^q P_{kj}(t)e^{\lambda_j t} \quad \forall k = [1, n], \quad (6.2.3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  – все *различные* собственные значения матрицы  $\|A\|$ , а  $P_{kj}(t)$  – алгебраический многочлен, степень которого на единицу меньше длины самой длинной из жордановых цепочек, отвечающих собственному значению  $\lambda_j$  и коэффициенты которого выражаются через  $n$  произвольных комплексных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Напомним также, что для  $\lambda = \alpha + i\beta$  справедливы равенства

$$P(t)e^{\lambda t} = P(t)e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

$$\text{причем } |\cos \beta t + i \sin \beta t| \equiv 1.$$

1°. Пусть  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \quad \forall j = [1, n]$ , тогда (известно из курса математического анализа)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_{kj}(t)e^{\lambda_j t} = 0 \quad \forall k = [1, n], \quad \forall j = [1, q].$$

Тогда каждое решение системы (6.2.2) при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к нулю и, следовательно, ограничено на  $t \in [t_0, +\infty)$ .

Эти утверждения очевидно верны и для фундаментальных (базисных) решений, служащих столбцами фундаментальной матрицы  $\|X\|$ , норма которой также оказывается ограниченной, то есть

$$\exists M > 0 : \langle \|X\| \rangle \leq M.$$

А поскольку в наших обозначениях для фундаментальной матрицы

$$\|x(t, a)\| = \|X\| \|a\| \implies \langle \|x(t, a)\| \rangle \leq \langle \|X\| \rangle \langle \|a\| \rangle ,$$

то из  $\langle \|a\| \rangle \leq \delta_\varepsilon$  получаем, что  $\langle \|x(t, a)\| \rangle \leq \varepsilon$  при

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

Откуда следует устойчивость  $x = o$  по Ляпунову.

Наконец, из условия  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, a) = o$  получаем, что  $x = o$  устойчиво асимптотически.

2°. В этом случае слагаемые в (6.2.3), для которых  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ , ограничены по тем же соображениям, что и в пункте 1°.

Слагаемым с  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$  соответствуют в (6.2.3) многочлены нулевой степени, поскольку предполагается, что кратность таких собственных значений равна размерности собственного подпространства (в  $U^n$  существует базис из собственных векторов). Значит все жордановы цепочки имеют длину 1, а многочлены  $P_{kj}(t)$  суть нулевой степени, т.е. константы и, значит, ограничены.

Получив те же оценки, что и в случае 1°, приходим к заключению о справедливости пункта 2°.

3°. Допустим, что  $\operatorname{Re} \lambda_{j^*} > 0$  для некоторого  $\lambda_{j^*}$ . Тогда соответствующее слагаемое в (6.2.3) неограничено на  $t \in [t_0, +\infty)$ . У задачи Коши (6.2.1) всегда есть вещественное неограниченное решение  $x(t, a)$ . Действительно, если  $x(t, a)$  неограниченное и комплексное, то хотя бы одно из вещественных решений  $\operatorname{Re} x(t, a)$  или  $\operatorname{Im} x(t, a)$  обязательно неограниченное.

Пусть  $\delta > 0$  – любое и сколь угодно малое. Тогда при  $C = \frac{\delta}{2|a|}$  мы имеем неограниченное решение  $y(t) = Cx(t, a)$ , однако для которого

$$|y(t_0)| = |Cx(t_0, a)| = \left| \frac{\delta}{2|a|} a \right| = \frac{\delta}{2} .$$

Значит положение равновесия  $x = o$  неустойчивое.



Если же  $\operatorname{Re}\lambda_j \leq 0 \forall j$ , но имеется собственное значение с  $\operatorname{Re}\lambda_{j^*} = 0$  для некоторого  $\lambda_{j^*}$ , кратность которого больше размерности собственного подпространства, то из теоремы 3.2.4 следует, что в формуле (6.2.3) имеется многочлен степени не меньшей, чем 1, старший коэффициент которого не нулевой. И, поскольку  $|e^{\lambda_{j^*} t}| = 1$ , это решение неограничено, а положение равновесия неустойчиво.

Теорема доказана.

Вернемся теперь к рассмотрению системы (6.2.1) в предположении, что  $x_0 = o$  является ее положением равновесия, то есть  $F(o) = o$ .

Опишем возможные подходы к исследованию такого положения равновесия на устойчивость.

Первый подход носит название исследования *устойчивости по линейному приближению* и заключается в следующем.

Пусть вектор-функция  $F(x)$  дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия  $x_0 = o$ . Тогда она представима в этой окрестности по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) в развернутом матричном виде как

$$\|F(x)\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| ,$$

где матрица  $\|A\|$  имеет элементы  $\alpha_{ij}$  такие, что  $\alpha_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=o}$ , а вектор-функция  $R(x)$  не только равна  $o$  при  $x = o$ , но и удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow o} \frac{|R(x)|}{|x|} = 0, \quad \text{где } |x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Тогда система уравнений (6.2.1) принимает вид

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\|, \quad (6.2.4)$$

и оказывается справедливой

- Теорема 6.2.2 (Об устойчивости по линейному приближению)
- 1°. Если  $\|A\|$  – матрица системы (6.2.4) такова, что  $\operatorname{Re}\lambda_j < 0 \quad \forall j$ , то решение этой системы  $x(t) = o$  асимптотически устойчиво.
  - 2°. Если матрица  $\|A\|$  имеет хотя бы одно  $\lambda$  с  $\operatorname{Re}\lambda > 0$ , то решение системы (6.2.4)  $x(t) = o$  неустойчиво.
  - 3°. Если  $\max_j \operatorname{Re}\lambda_j = 0$ , то устойчивость (или неустойчивость)  $x(t) = o$  зависит не только от матрицы  $\|A\|$ , но и от вектор-функции  $R(x)$ .

Условия пунктов 1° и 2° являются достаточными для того, чтобы делать заключения об устойчивости (или неустойчивости) положения равновесия  $x = o$  системы (6.2.4). Положения равновесия, удовлетворяющие этим условиям, принято называть *грубыми положениями равновесия*.

Положения равновесия, для которых оказываются справедливыми условия пункта 3°, называются *негрубыми положениями равновесия*. Исследование особых решений в этом случае можно попытаться выполнить альтернативным методом, разработанным А.М. Ляпуновым, основой которого служат следующие определения и теоремы.

<p><b>Определение</b> 6.2.3</p>	<p>Функция <math>\Phi(x)</math> такая, что <math>\Phi(o) = 0</math>, называется в некоторой проколотой окрестности <math>\dot{U}</math> элемента <math>x = o</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– <i>положительно определенной</i>, если <math>\Phi(x) &gt; 0 \quad \forall x \in \dot{U}</math>;</li> <li>– <i>отрицательно определенной</i>, если <math>\Phi(x) &lt; 0 \quad \forall x \in \dot{U}</math>;</li> <li>– <i>неотрицательной</i>, если <math>\Phi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \dot{U}</math>;</li> <li>– <i>неположительной</i>, если <math>\Phi(x) \leq 0 \quad \forall x \in \dot{U}</math>.</li> </ul>
-------------------------------------	--

Определение  
6.2.4

Производной в силу системы (6.2.1) от функции  $\Phi(x)$  называется выражение

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(x) &= \|\operatorname{grad} \Phi(x)\|^T \|F(x)\| = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} F_j(x).\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что производная в силу системы <sup>1</sup> (6.2.1) есть полная производная по  $t$  от сложной функции  $\Phi(x(t))$ , если  $x(t)$  – решение этой системы. При этом в произвольной точке  $x$  для вычисления значений производной в силу системы решать саму систему не требуется.

---

<sup>1</sup>В формулах производную в силу системы будем помечать левым наклонным верхним штрихом, например,  $\dot{F}$ .

Определение  
6.2.5

Положительно определенная в некоторой проколотой окрестности  $\dot{U}$  элемента  $x = o$  функция  $V(x)$  называется *функцией А.М. Ляпунова*, если

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \dot{U},$$

где  $\dot{V}(x)$  – производная в силу системы (6.2.4).

Исследование системы (6.2.1) по методу Ляпунова базируется на следующих трех теоремах.

**Теорема 6.2.3** (Ляпунова об устойчивости) **Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (6.2.1)  $x = o$  существует функция Ляпунова  $V(x)$ , то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.**

Другими словами, согласно теореме 6.2.3, неположительность производной в силу системы (6.2.4) от функции Ляпунова гарантирует устойчивость положения равновесия.

**Теорема 6.2.4** (Об асимптотической устойчивости) **Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (6.2.1)  $x = o$  существует функция Ляпунова  $V(x)$  такая, что ее производная в силу системы (6.2.1)  $\dot{V}(x)$  отрицательно определена в этой окрестности, то данное положение равновесия асимптотически устойчиво.**

Доказательство неустойчивости положения равновесия может основываться на использовании специальной функции  $W(x)$ , называемой *функцией Н.Г. Четаева*.

Пусть  $U$  некоторая окрестность  $x = o$ , а  $\Omega \subset U$  такая, что  $x = o$  – граничная точка  $\Omega$ .

**Теорема 6.2.5** Если существует функция  $W(x)$  непрерывно дифференцируемая на  $\Omega$  такая, что

(Четаева  
о

$$W(x) > 0, \quad \dot{W}(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

неустой-  
чивости)

где  $\dot{W}(x)$  производная в силу системы, и все точки  $x^* \in \Omega$ , в которых  $W(x^*) = 0$ , суть граничные точки  $\Omega$ .

Тогда положение равновесия  $x = o$  неустойчиво.

Как уже отмечалось ранее, условия сформулированные в теоремах 6.2.3–6.2.5 позволяют делать заключения о типе устойчивости негрубых положений равновесия, когда теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима. При этом важно, что решения системы (6.2.4) для получения этих заключений, находить не требуется.

С другой стороны, общей методики построения функций  $V(x)$  и  $W(x)$  не имеется, и для этой цели приходится использовать специфику решаемой задачи. Например, доказано, что функция Ляпунова всегда существует в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия. Однако в более общем случае такие функции имеются не для любого класса систем дифференциальных уравнений.



Особенности практического применения методов Ляпунова и Четаева проиллюстрируем на примере решения двух следующих задач.

**Задача 6.2.2** Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^5 - x_1x_2. \end{cases} \quad (6.2.5)$$

**Решение.** 1°. У данной системы единственное положение равновесия – начало координат. Матрица  $\|A\|$  в начале координат очевидно нулевая и теорема 6.2.2 здесь не применима.

2°. Покажем, что функция  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  удовлетворяет условиям теоремы 6.2.4. Действительно, она положительно определенная в любой окрестности начала координат и  $V(0, 0) = 0$ .

Ее производная в силу системы (6.2.5) равна

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1(-x_1^3 + x_2^2) + 2x_2(-x_1^5 - x_1x_2) = \\ &= -2x_1^4 - 2x_2^6 \end{aligned}$$

и является отрицательно определенной в любой окрестности начала координат.

**Решение получено.** Тогда по теореме 6.2.4  $x = 0$  есть асимптотически устойчивое положение равновесия для системы (6.2.5).

**Задача 6.2.3** Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_2^5, \\ \dot{x}_2 = x_1x_2^2. \end{cases} \quad (6.2.6)$$

**Решение.** 1°. У системы (6.2.6) начало координат единственное положение равновесия. Матрица  $\|A\|$  также нулевая и потому теорема 6.2.2 не применима.

2°. Пусть

$$U = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon\},$$

$$\text{а } \Omega = \{(x_1; x_2) \in U : x_1 > x_2^2\}.$$

Покажем, что функция  $W(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$  удовлетворяет в  $\Omega$  условиям теоремы 6.2.5. Действительно, здесь она положительно определенная и  $W(0, 0) = 0$ . (см. рис. 6.2).

Ее производная в силу системы (6.2.6)

$$\dot{W}(x_1, x_2) = 2x_1(x_1^2 + 2x_2^5) - 4x_2^3x_1x_2^2 = 2x_1^3$$

является положительно определенной в  $\Omega$ , а начало координат есть единственная точка, в которой  $\dot{W}(x_1, x_2) = 0$ .

Тогда по теореме 6.2.5 получаем, что начало координат есть неустойчивое положение равновесия для системы (6.2.6).

**Решение**  
получено.

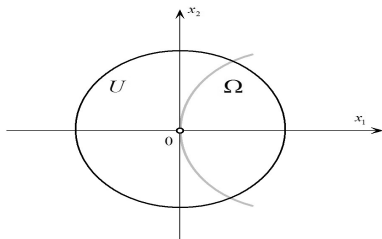


Рис. 1. К решению задачи 6.2.2