# Простейшая задача вариационного исчисления

В курсе математического анализа были рассмотрены задачи отыскания экстремумов функций как одной, так и многих переменных.

Еще в Древней Греции было известно, что линией заданной фиксированной длины, ограничивающей на плоскости фигуру с максимальной площадью, является окружность.

Другой оптимизационной задачей, не решаемой методами конечномерного математического анализа, которую сформулировал в конце XVII века Иоганн Бернулли, является так называемая *задача о брахистохроне*, имеющая следующую формулировку.

> Пусть в вертикальной плоскости даны две не лежащие на одной вертикали точки $A$ и $B$. Требуется найти гладкую траекторию, соединяющею эти точки, по которой материальная точка под действием силы тяжести скатится из $A$ в $B$ за минимальное время.

Приведем формализованную постановку этой задачи.

Пусть начало координат находится в точке $A$, ось $Ox$ направлена горизонтально влево, а ось $Oy$ – вертикально вниз. Пусть точка $B$ имеет координаты $\{P,\ Q\}$.

Требуется найти гладкую линию, являющуюся графиком функции $y(x)$ (параметрически $\left\{\begin{array}{l} x = x(t), \\ y = y(t), \end{array}\right.$ ), начав по которой при $t = 0$ движение из $A$, под действием силы тяжести материальная точка попадет в $B$ за минимально возможное время.

Как известно из курса физики, скорость движения материальной точки в однородном поле тяжести равна $v = \dfrac{dS}{dt} = \sqrt{2gy}$, в то время как дифференциал длины дуги траектории $dS = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$.

Откуда

$$dt = \frac{dS}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}.$$

Окончательно получаем, что решением задачи является функция $y(x)$, минимизирующая выражение вида

$$J\Big(y(x)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^P \sqrt{\frac{1+y'^2(x)}{y(x)}}\,dx$$

при условиях: $y(0) = 0$ и $y(P) = Q$.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Пусть $F(x, y, p)$ непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция.

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F\Big(x, y(x), y'(x)\Big) dx \tag{7.1.2}$$

на множестве $\mathcal{C}^1_{AB}[a, b] \subset \mathcal{C}^1[a, b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y(a) = A$ и $y(b) = B$.

Здесь мы использовали обозначения:

$\mathcal{C}^1[a,b]$ — множество всех непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ вещественных функций, расстояние между которыми определяется формулой

$$\rho\,(y_1,y_2)=\max_{x\in[a,b]}|y_1(x)-y_2(x)|+\max_{x\in[a,b]}|y_1'(x)-y_2'(x)|\quad\forall y_1,y_2\in\mathcal{C}^1[a,b]\,.$$

Заметим, что множество $\mathcal{C}^1[a,b]$ является линейным нормированным пространством с нормой

$$\langle y\rangle=\max_{x\in[a,b]}|y(x)|+\max_{x\in[a,b]}|y'(x)|\;. \tag{7.1.1}$$

Проверьте самостоятельно (это будет полезно для дальнейшего), что множество $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ является линейным пространством, а множество $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ при $|A|+|B|\neq 0$ – нет.

| | |
|---|---|
| Определение 7.1.1 | Будем говорить, что функционал (7.1.2) достигает на функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ *слабого локального минимума* (*максимума*), если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $$\forall y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b] \qquad \text{с} \qquad \rho(\, y(x),\, y^*(x)\,) < \varepsilon$$ выполняется неравенство $$J(y) \geq J(y^*) \quad (\, J(y) \leq J(y^*)\,)\ .$$ Если неравенства строгие при $y \neq y^*$ , то говорят о *строгом* экстремуме. В случае, когда неравенства удовлетворяются *для всех* функций $y(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, экстремум *абсолютный.* |

Задачу отыскания слабого локального экстремума при использовании нормы (7.1.1) называют *простейшей вариационной задачей* или же *задачей с закрепленными концами.*

Основным инструментом при исследовании на экстремум функционала вида (7.1.2) служит его *вариация* – функционал, являющийся аналогом производной по направлению от функции многих переменных.

Для его определения нам потребуется еще одно подмножество в пространстве $\mathcal{C}^1[a,b]$, а именно $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ – множество непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $h(x)$ таких, что $h(a)=h(b)=0$.

Заметим, что при любом вещественном параметре $\alpha$ функция $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha h(x)\in\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$, если $h(x)\in\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. Это свойство дает основание называть $\alpha h(x)$ *допустимым приращением* (или, как иногда говорят, *допустимой вариацией*) $y(x)$ – аргумента исследуемого функционала (7.1.2).

Наконец, рассматривая при малых по модулю $\alpha$ множество значений функционала

$$J(y+\alpha h)=\int\limits_a^b F\left(x,y(x)+\alpha h(x),y'(x)+\alpha h'(x)\right)dx\,, \qquad (7.1.3)$$

можно делать заключения об экстремальных свойствах исходного функционала (7.1.2) в малой окрестности функции $y(x)$ (в пространстве $\mathcal{C}^1[a,b]$).

Более конкретно, величину и направление изменения $J(y+\alpha h)$ (как функции параметра $\alpha$ при фиксированных $y(x)$ и $h(x)$) можно оценивать числом $\left.\dfrac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$.

В сделанных предположениях (для малых по модулю значений $\alpha$) функционал $J(y+\alpha h)$ является непрерывно дифференцируемой функцией $\alpha$.

С другой стороны, (7.1.3) можно рассматривать как собственный интеграл, зависящий от параметра $\alpha$, для которого справедлива теорема Лейбница, утверждающая, что

$$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int\limits_a^b \left( \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\left(x, y(x), y'(x)\right)}{\partial y'} h'(x) \right) dx \ . \quad (7.1.4)$$

| | |
|---|---|
| Определение 7.1.2 | Выражение $$\left.\frac{dJ(y+\alpha h)}{d\alpha}\right\|_{\alpha=0}$$ называется *первой вариацией* функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ при $\forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. Первую вариацию принято обозначать $\delta J(y,h)$. |

Обратите внимание на структурное сходство формулы (7.1.4) с формулой

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_k}\, \omega_k \ ,$$

определяющей в $E^n$ величину производной функции $F\,(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots\,\xi_n)$ по направлению $\|l\| = \|\,\omega_1,\,\omega_2,\,\ldots,\,\omega_n\|^{\mathrm{T}}$ .

Необходимое условие существования слабого экстремума, используя понятие первой вариации, формулирует

| | |
|---|---|
| Теорема 7.1.1 | **Если $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то $\delta J(y^*,h) = 0 \ \ \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$.** |

Доказательство.

Пусть для определенности функционал $J(y)$ имеет на функции $y^*(x) \in \mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ слабый локальный минимум. Тогда, согласно определению 7.1.1, в $\mathcal{C}^1_{AB}[a,b]$ существует некоторая окрестность $U_\varepsilon(y^*)$ такая, что $\forall y(x) \in U_\varepsilon(y^*)$ выполнено неравенство

$$J(y(x)) \geq J(y^*(x)).$$

При этом $y(x)$ может быть представлена в виде $y^*(x)+\alpha h(x)$, где $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. И для *непрерывно дифференцируемой по параметру* $\alpha$ функции $J(y^*(x)+\alpha h(x))$ верно неравенство

$$J\left(y^*(x)+\alpha h(x)\right) \geq J(y^*(x)) \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b].$$

Значит функция $J(y^*(x)+\alpha h(x))$ имеет минимум в $\alpha = 0$ и, следовательно, ее производная

$$\left.\frac{dJ(y^*+\alpha h)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \quad = \quad \delta J(y^*,h) \quad = \quad 0$$

(в силу (7.1.4) и определения 7.1.2) для любой фиксированной функции $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$.

Теорема доказана.

При использовании теоремы 7.1.1 необходимо убеждаться в равенстве нулю первой вариации $\delta J(y^*, h)$ одновременно *для всех* функций $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$, что может оказаться непростой задачей.

Более удобное для практического использования необходимое условие экстремума в случае простейшей вариационной задачи можно получить (следуя Лагранжу), проверив, что верна (часто называемая *основной леммой вариационного исчисления*)

Лемма 7.1.1

**Если** $f(x)$ **непрерывна на** $[a, b]$ **и**

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b],$$

**то** $f(x) \equiv 0$ **на** $[a, b]$.

Доказательство.

Предположим противное. Пусть $f(x) \not\equiv 0,\ x \in [a,b]$. Тогда $\exists\, x_0 \in [a,b]$ такое, что $f(x_0) \neq 0$. Например, пусть $f(x_0) > 0$.

В силу непрерывности $f(x)$ найдутся $x_0 \in (a,b)$ и $\Delta > 0$ такие, что

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta] \quad \subseteq (a,b).$$

В $\mathcal{C}^1_{00}[a,b]$ выберем функцию $h(x) =$

$$= \begin{cases} (x - (x_0 - \Delta))^2 (x - (x_0 + \Delta))^2, & x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta], \\ 0, & x \notin [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]. \end{cases}$$

Согласно интегральной теореме о среднем имеем оценку

$$\int\limits_a^b f(x) h(x)\, dx = \int\limits_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} f(x) h(x)\, dx =$$

$$= f(\xi) \int\limits_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} h(x)\, dx \quad \geq \quad \frac{1}{2} f(x_0) \int\limits_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} h(x)\, dx > 0\ ,$$

где $\xi \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$. Но это противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

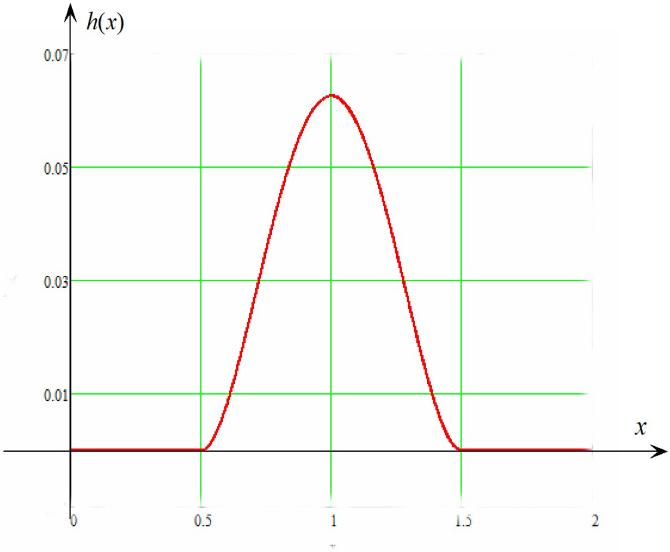


Рис. 1. К доказательству леммы 7.1.1.

Лемма 7.1.1 позволяет получить необходимое условие простейшей вариационной задачи в следующей упрощенной форме, которую дает

Теорема 7.1.2 **Пусть $F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x)$, $x \in [a, b]$ есть решение простейшей вариационной задачи, то она удовлетворяет** *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \, . \tag{7.1.5}$$

Доказательство.

Поскольку $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то $\delta J(y^*, h) = 0$ для любой $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b]$. С учетом формулы (7.1.4) это дает

$$0 = \int\limits_a^b \left( \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x) \right)\Bigg|_{y=y^*} dx.$$

В условиях теоремы второе слагаемое в подынтегральной функции можно проинтегрировать по частям

$$0 = \frac{\partial F\,(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h(x)\Bigg|_a^b + \int\limits_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x)\,dx\ ,$$

поскольку $h(a) = h(b) = 0$.

Из непрерывности функции

$$f(x) = \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right)\Bigg|_{y=y^*}$$

и основной леммы вариационного исчисления (лемма 7.1.1) следует, что $y^*(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (7.1.5).

Теорема доказана.

| | |
|---|---|
| Определение 7.1.3 | Всякое решение уравнения Эйлера (7.1.5) называется *экстремалью* функционала $J(x, y, y')$.<br>В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $\mathcal{C}^1_{AB}[a, b]$, она называется *допустимой экстремалью.* |

Сделанное при выводе уравнения Эйлера предположение о непрерывности второй производной допустимой экстремали оказывается излишним, если использовать, приводимою здесь без доказательства, следующую лемму.

Лемма 7.1.2 (Дюбуа-Реймона) **Если** $f(x)$ **непрерывна на** $[a,b]$ **и**

$$\int\limits_a^b f(x)h'(x)\,dx = 0 \qquad \forall h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a,b],$$

**то** $f(x) \equiv \mathrm{const}$ **на** $[a,b]$.

Действительно, пусть

$$G(x) = \int\limits_a^x \frac{\partial F(u, y(u), y'(u))}{\partial y}\, du\,.$$

Тогда, в силу теоремы 7.1.1 и формулы 7.1.3, имеем

$$\delta J(y^*, h) = 0 = \int\limits_a^b \left( G'(x)h + \frac{\partial F}{\partial y'}h' \right) dx =$$

(интегрируя первое слагаемое по частям)

$$= G(x)h\Big|_a^b - \int\limits_a^b G(x)h'dx + \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}h'dx = \int\limits_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y'} - G(x) \right) h'dx\,,$$

если учесть, что $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[a, b]$.

Применив теперь утверждение леммы Дюбуа-Реймона, получаем *интегральную форму* уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \int\limits_{a}^{x} \frac{\partial F}{\partial y}\, du \equiv const\,.$$

Откуда, окончательно следует, что

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,.$$

Полученное условие экстремальности является необходимым, но не достаточным. Поэтому, в тех случаях, когда допустимая экстремаль однозначно определяется уравнением Эйлера и граничными условиями, целесообразно попытаться выполнить исследование на экстремальность непосредственно по его определению.

Использование этого метода иллюстрирует

Задача 7.1.1 Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left( x^3 + \frac{1}{2} y^2 + 2y'^2 \right) dx \ , \quad y(0) = 0, \ y(1) = 2 \ .$$

Решение. Заметим, что

$$J(y) = \frac{1}{4} + \int\limits_0^1 \left( \frac{1}{2} y^2 + 2y'^2 \right) \, dx$$

и исследование на экстремальность достаточно выполнить для функционала $J(y) = \int\limits_0^1 \left( \frac{1}{2} y^2 + 2y'^2 \right) \, dx$ .

Составим и решим уравнение Эйлера. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y \ , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 4y' \ , \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 4y'' \ .$$

Тогда, $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y'' - y = 0$ .

Общее решение этого уравнения

$$y(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

есть множество всех экстремалей, в том числе и допустимых. Граничные условия есть система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} C_1 & + & C_2 & = & 0 \ , \\ C_1 e^{\frac{1}{2}} & + & C_2 e^{-\frac{1}{2}} & = & 2 \ . \end{array} \right.$$

Откуда находим, что

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{1}{2}}\,,$$

и единственная *допустимая* экстремаль дается формулой

$$y^*(x) = \frac{2\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{sh}\dfrac{1}{2}}\,.$$

Исследуем найденную допустимую экстремаль на оптимальность. Пусть $h(x)$ – произвольная пробная функция из класса $\mathcal{C}^1_{00}[0,1]$.

Оценим знак приращения функционала

$$J(y^* + h) - J(y^*) =$$

$$= \int\limits_0^1 \left( \frac{(y^* + h)^2}{2} + 2((y^*)' + h')^2 - \frac{(y^*)^2}{2} - 2((y^*)')^2 \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 y^* h \, dx + 4 \int\limits_0^1 (y^*)' h' \, dx + \int\limits_0^1 \left( \frac{h^2}{2} + 2h'^2 \right) dx =$$

(проинтегрировав второй интеграл по частям и перегруппировав слагаемые)

$$= \int\limits_0^1 (y^* - 4(y^*)'') \, h \, dx + 4(y^*)' h \Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \left( \frac{h^2}{2} + 2h'^2 \right) dx \geq 0,$$

поскольку первый интеграл равен нулю в силу равенства $y^* - 4(y^*)'' = 0$, а проинтегрированная часть есть ноль по свойству пробной функции $h(0) = h(1) = 0$.

Решение получено.

Таким образом, приходим к заключению о том, что допустимая экстремаль $y^*(x)$ доставляет исследуемому функционалу абсолютный минимум.

Допустимая экстремаль, находимая из уравнения Эйлера, вообще говоря, не обязательно является решением простейшей вариационной задачи. Этот факт демонстрирует

**Задача 7.1.2** Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left( y'^2 - \frac{25}{4} y^2 \right) dx \ , \quad y(0) = 1, \ y(\pi) = 2 \ .$$

Решение. Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$y'' + \frac{25}{4} y = 0 \; .$$

Его общее решение есть

$$y(x) = C_1 \cos \frac{5x}{2} + C_2 \sin \frac{5x}{2} \; ,$$

а допустимая экстремаль

$$y^*(x) = \cos \frac{5x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \; .$$

Возьмем $h(x) \in \mathcal{C}^1_{00}[0,\pi]$ вида $h(x) = \dfrac{1}{k} \sin nx$, где $k$ и $n$ – произвольные натуральные числа. Тогда, выполнив преобразования аналогичные сделанным при решении задачи 7.1.1, получим

$$\Delta J = J(y^* + h) - J(y^*) =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left( h'^2 - \frac{25}{4} h^2 \right) \, dx = \left( n^2 - \frac{25}{4} \right) \frac{\pi}{2k^2}.$$

Откуда следует, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Delta J < 0$ при $n = 1; \, 2$

и $\Delta J > 0$ при $n \geq 3$ .

Решение получено. Значит $y^*(x)$ не является решением данной вариационной задачи.

В заключение обсуждения постановки простейшей задачи вариационного исчисления обратим внимание на то, что в определении 7.1.1 в названии типа экстремума присутствует прилагательное «слабый». Возникает вопрос: какой смысл в использовании этого термина?

Ответ заключается в том, что линейное пространство, образованное функциями непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$ не является конечномерным. Действительно, при исследовании функционалов на экстремум необходимо иметь количественную оценку степени близости произвольной пары элементов в этом пространстве. Как известно, одним из способов построения такой оценки является введение нормы элемента (например по формуле (7.1.1), т.е. превращение рассматриваемого линейного пространства в нормированное. Однако, различные типы норм в линейных пространствах, не имеющих базиса, не эквивалентны друг другу и могут приводить при решении экстремальных задач для одного и того же функционала к различным результатам.

Поясним сказанное следующим примером. Рассмотрим как альтернативу линейному пространству непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой (7.1.1) нормированное линейное пространство функций, имеющих непрерывную производную, кроме быть может, конечного числа точек на $[a, b]$, в которых производная имеет разрыв первого рода. Норму во втором пространстве определим по формуле

$$\langle y \rangle = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| \ .$$

По сложившейся исторически традицией экстремум с такой с нормой принято называть «сильным».

В качестве упражнения найдите допустимую экстремаль для задачи с условиями

$$J(y) = \int\limits_0^1 {y'}^3 \, dx \ , \qquad y(0) = 0, \ \ y(1) = 1 \ .$$

Используя определение 7.1.1 с разными нормами, покажите, что в этой задаче на допустимой экстремали $y(x) = x$ имеется слабый экстремум, но нет сильного.

В более общем виде связь между условиями существования сильного и слабого экстремума на допустимой экстремали можно сформулировать так:

> необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума есть достаточное условие слабого.