СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ
по предмету
«ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

`МФТИ, 2 курс, весенний семестр`

Умнов А.Е.

Материал для занятия 08 апреля 2020 года.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА
01 УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ

Рассмотрим *несобственный* интеграл от функции двух переменных $f(x,\alpha)$

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_a^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx \ , \qquad (1)$$

определенной по x на промежутке $a \le x < b$ [1] и при $\alpha \in \Omega$. Значение этого интеграла, вообще говоря, зависит от значения α, при котором он берется.

Несобственный интеграл по своему определению есть *предел* от римановского (определенного) интеграла, когда, например, верхний предел последнего стремится к b [2]. В этом случае зависимость значения (1) от величины α является функциональной, поскольку предел, если существует, должен быть единственным. То есть, интеграл в формуле (1) есть *функция* от переменной α.

Здесь возникает естественный вопрос: как свойства функции $\Phi(\alpha)$ зависят от свойств функции $f(x,\alpha)$? Или, иначе говоря, можно ли, выполняя какую-либо операцию с функцией $\Phi(\alpha)$ (скажем, вычисления предела, дифференцирования или интегрирования по α) "переставлять" эту операцию и интегрирование в (1) ?

В общем случае этого делать *нельзя*, но представляется целесообразным выяснить, при каких условиях такое возможно.

Чтобы разобраться с этой проблемой, дадим предварительно два определения:

1) Интеграл (1) называется *поточечно* сходящимся на множестве Ω, если

$$\forall \alpha \in \Omega \ \text{ и } \ \forall \varepsilon > 0 : \ \exists \delta_{\varepsilon,\alpha} > 0 : \ \forall \delta : \ b - \delta_{\varepsilon,\alpha} < \delta < b \quad \mapsto \quad \left| \int\limits_{b-\delta_{\varepsilon,\alpha}}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon \, .$$

2) Интеграл (1) называется *равномерно* сходящимся на множестве Ω, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ : \ \forall \alpha \in \Omega \ \text{ и } \ \forall \delta : \ b - \delta_\varepsilon < \delta < b \quad \mapsto \quad \left| \int\limits_{b-\delta_\varepsilon}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon \, .$$

---

[1] Здесь символ b может означать как положительное число, так и $+\infty$.

[2] Напомним, что в римановском интеграле подынтегральная функция, равно как и промежуток интегрирования, должны быть ограниченными. В несобственном интеграле это не требуется.

Заметим, что, хотя определения 1) и 2) по тексту похожи, между ними имеется существенная разница.

Первое определение просто означает существование несобственного интеграла для каждого фиксированного $\alpha \in \Omega$. Согласно этому определению в случае поточечной сходимости имеется правило выбора $\delta_{\varepsilon,\alpha}$ (по заранее заданным значениям ε и α), которое обеспечивает выполнение, указанного в определении, условия. При этом данное правило может быть *разным* для разных значений $\alpha \in \Omega$.

Во втором определении требуется существование правила выбора δ_{ε}, обеспечивающего выполнение, указанного в определении, условия разом для *всех* значений α из Ω.

Понятно, что второе определение более "жесткое", чем первое. То есть, из равномерной сходимости интеграла (1) следует поточечная, но не наоборот.

Имеют место следующие утверждения (теоремы).

Теорема 1. Если $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве $K:\{\, a \le x < b,\ \alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]\}$ и если интеграл (1) сходится равномерно на $[\alpha_1,\alpha_2]$, то $\Phi(\alpha)$ непрерывна на $[\alpha_1,\alpha_2]$ и справедлива формула $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_{a}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_{a}^{\mapsto b} dx \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha$.

Теорема 2. Если функции $f(x,\alpha)$ и $f_{\alpha}^{'}(x,\alpha)$ непрерывны на множестве $K:\{\, a \le x < b,\ \alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]\}$ и если интеграл (1) сходится поточечно на $[\alpha_1,\alpha_2]$, а интеграл $\int\limits_{a}^{\mapsto b} f_{\alpha}^{'}(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно на $[\alpha_1,\alpha_2]$, то справедлива формула $\Phi'(\alpha) = \int\limits_{a}^{\mapsto b} f_{\alpha}^{'}(x,\alpha)\,dx$.

Из этих теорем следует важность свойства равномерной сходимости в задачах исследования несобственных интегралов, зависящих от параметра. При этом непосредственное использование определения 2) может оказаться весьма трудоемким.

Для решения практических задач в ряде случаев оказываются полезными следующие утверждения:

I. *Необходимое и достаточное равномерной сходимости.*

Интеграл сходится равномерно тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{A\to b} \sup\limits_{\alpha\in\Omega} \int\limits_{A}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx = 0$.

II. *Отрицание равномерной сходимости.*
Интеграл (1) не сходится равномерно, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ и } \alpha_0 \in \Omega \ :\ \forall \delta > 0 \quad \exists \xi_0 :\ b - \delta < \xi_0 < b \quad \mapsto \quad \left| \int\limits_{\xi_0}^{\mapsto b} f(x,\alpha)\,dx \right| \ge \varepsilon_0 .$$

III. *Признак Вейерштрасса* (*достаточное условие равномерной сходимости*).
Если существует A такое, что функция $\phi(x)$ определенная на $[A,+\infty)$ такова, что:

1) $\forall x \in [A,+\infty)$ и $\forall \alpha \in \Omega$: $\left| f(x,\alpha) \right| \le \phi(x)$,

2) несобственный интеграл $\int\limits_{A}^{\mapsto b} \phi(x)\,dx$ сходится,

то интеграл (1) сходится равномерно на Ω.

IV. *Критерий Коши* (*необходимое и достаточное условие равномерной сходимости*).
Интеграл (1) сходится равномерно, тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0 \;:\; \exists\delta_\varepsilon \in (a,b) \;:\forall\alpha\in\Omega \;\; \forall\delta' \in [\,\delta_\varepsilon, b) \;\text{ и }\; \forall\delta'' \in [\,\delta_\varepsilon, b) \;\; \mapsto \;\; \left| \int_{\delta'}^{\delta''} f(x,\alpha)\,dx \right| < \varepsilon .$$

V. *Отрицание критерия Коши*. Если

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \;\; \forall\delta \in (a,b):\; \exists\alpha_0 \in \Omega, \;\; \exists\delta_0' \in [\,\delta, b) \;\text{ и }\; \exists\delta_0'' \in [\,\delta, b) \;\; \mapsto \;\; \left| \int_{\delta_0'}^{\delta_0''} f(x,\alpha_0)\,dx \right| \ge \varepsilon_0 ,$$

то несобственный интеграл не сходится равномерно.

VI. *Признак Дирихле* (*достаточное условие равномерной сходимости*).
Интеграл вида $\int\limits_A^{\mapsto b} f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на множестве Ω, если на множестве $x\in[a,b)$ при каждом $\alpha\in\Omega$ функции $f(x,\alpha)$, $g(x,\alpha)$ и $g_x'(x,\alpha)$ непрерывны по x и удовлетворяют условиям:

1) $\lim\limits_{x\to b} g(x,\alpha) = 0$ равномерно по $\alpha\in\Omega$,
2) функция $g_x'(x,\alpha)$ знакопостоянна на $x\in[a,b)$ при каждом $\alpha\in\Omega$,
3) $\exists M > 0 \;\; \forall\alpha\in\Omega$ и $\forall x\in[a,b) \;\; \mapsto \;\; \left| \int\limits_a^x f(u,\alpha)\,du \right| \le M$.

Основываясь на этих теоретических утверждениях, выполняют исследования несобственных интегралов на сходимость. Соответствующие примеры будут рассмотрены далее. Сейчас же, в качестве небольшого упражнения, сформулируйте в терминах "$\varepsilon-\delta-\alpha$" условие 1) в признаке Дирихле.