СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ
по предмету
«ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МФТИ, 2 курс, весенний семестр

Умнов А.Е.

Материал для занятия 08 апреля 2020 года.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА
02 ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НА РАВНОМЕРНУЮ СХОДИМОСТЬ

Пример 1. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha)=\int\limits_A^{+\infty}\alpha\, e^{-\alpha x}\,dx$ при $A>0$ на множествах: 1) $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$, где $\alpha_0>0$ и 2) $\alpha\in(0,+\infty)$.

Решение. 1) Применим критерий **I**. Имеем

$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha\in[\alpha_0,+\infty)}\int\limits_A^{+\infty}\alpha\, e^{-\alpha x}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\sup_{\alpha\in[\alpha_0,+\infty)}e^{-\alpha A}=\lim_{A\to+\infty}e^{-\alpha_0 A}=0,$$

то есть, интеграл сходится равномерно.

2) Аналогично, $\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{\alpha>0}\int\limits_A^{+\infty}\alpha\, e^{-\alpha x}\,dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{\alpha>0}e^{-\alpha A}\geq\lim\limits_{a\to+\infty}e^{-\alpha_0 A}=e^{-1}>0$,

поскольку среди положительных α для любого $A>0$ найдется $\alpha_0=\dfrac{1}{A}$.

Следовательно, равномерной сходимости на втором множестве по α нет.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{a\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$.

Решение. Из оценки $\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}\leq\dfrac{1}{1+x^2}\quad\forall\alpha\in\mathbf{R}$ по признаку **III** (Вейерштрасса), в силу сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi$, заключаем, что указанный в условии интеграл сходится равномерно по α на $\mathbf{R}$.

Поэтому по теореме 1 (в силу непрерывности по α) будет верно равенство

$$\lim_{a\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim_{a\to0}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\pi.$$

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}$ на множествах: 1) $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$, где $\alpha_0>0$ и 2) $\alpha\in(0,+\infty)$.

Решение. 1) Применим определение 2, которое в данной задаче имеет вид

$$\forall\varepsilon>0\ :\ \exists\delta_\varepsilon>0\ :\ \forall\alpha\in[\alpha_0,+\infty)\ \text{ и }\ \forall\delta:\ \delta_\varepsilon<\delta<+\infty\ \ \mapsto\ \left|\int\limits_\delta^{+\infty}\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}\right|<\varepsilon .$$

Нам надо найти правило, по которому для каждого заранее заданного положительного ε можно указать δ_ε, обеспечивающее выполнение этого неравенства. Воспользуемся тем, что соответствующий неопределенный интеграл берущийся, т.е. равенством $\int\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\alpha x+C$.

Согласно формуле Ньютона-Лейбница (для несобственного интеграла) и свойствам функции $\operatorname{arctg}x$, для любых положительных ε,α и α будут справедливы соотношения

$$0<\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\alpha\delta=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\ \Rightarrow\ \ \alpha\delta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\varepsilon}{2}+\pi k\right)\ \ \forall k\in\mathbf{Z}.$$

Вид δ_ε одинаков для любого целого k, поэтому положим $k=0$. Тогда для δ_ε имеем $\alpha\delta_\varepsilon=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\varepsilon}{2}\right)\ \Rightarrow\ \delta_\varepsilon=\frac{1}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\varepsilon}{2}.$

Наконец (проверьте это самостоятельно), поскольку $\frac{1}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\varepsilon}{2}$ при $\alpha\varepsilon<\pi$ монотонно убывает по α, то в качестве искомой зависимости δ_ε от ε можно взять $\delta_\varepsilon=\frac{1}{\alpha_0}\operatorname{ctg}\frac{\alpha_0\varepsilon}{2}$. Что и доказывает равномерную сходимость интеграла.

2) Докажем отсутствие равномерной сходимости интеграла отрицанием критерия **III** (Коши), которое в данном случае имеет вид

$$\exists\varepsilon_0>0\ :\ \forall\delta>0:\ \exists\alpha_0>0,\ \exists\delta_0^{'}\ge\delta\ \text{ и }\ \exists\delta_0^{''}\ge\delta\ \ \mapsto\ \left|\int\limits_{\delta_0^{'}}^{\delta_0^{''}}\frac{dx}{1+\alpha_0^2x^2}\right|\ge\varepsilon_0 .$$

Подынтегральная функция положительна и монотонно убывает по x. Поэтому справедлива оценка $\left|\int\limits_{\delta_0^{'}}^{\delta_0^{''}}\frac{dx}{1+\alpha_0^2x^2}\right|\ge\frac{\delta_0^{''}-\delta_0^{'}}{1+\alpha_0^2\delta_0^{''2}}=\varepsilon_0$. Однако последнее равенство верно при следующих *допустимых* (проверьте это!) значениях $\forall\delta=\delta_0^{'}>0,\quad\delta_0^{''}=\delta_0^{'}+1,\quad\alpha_0=\frac{1}{\delta_0^{''}},\quad\varepsilon_0=\frac{1}{2}$.

Действительно, при данных значениях параметров выполняются равенства

$$\frac{\delta_0^{''}-\delta_0^{'}}{1+\alpha_0^2\delta_0^{''2}}=\frac{\left(\delta_0^{'}+1\right)-\delta_0^{'}}{1+\left(\frac{1}{\delta_0^{''}}\right)^2\delta_0^{''2}}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0\ ,$$

т.е. неравномерной сходимости нет по отрицанию критерия Коши.

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость $\Phi(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\, dx$ на множествах: 1) $\alpha \in (-\infty, 0)$ и 2) $\alpha \in (0, +\infty)$.

Решение. 1) Применим признак Вейерштрасса. При любом $\alpha < 0$ справедливо неравенство $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\, dx < \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$. Поскольку последний интеграл сходится, то исходный интеграл на множестве $\alpha \in (-\infty, 0)$ сходится равномерно.

2) Для $\alpha \in (0, +\infty)$ на множестве $x > \alpha$ подынтегральная функция положительна и монотонно убывающая по x. Тогда по отрицанию критерия Коши

$$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{e}: \quad \forall \delta > 0: \; \exists \alpha_0 = \delta \quad \text{и} \quad \exists \delta_0^{'} = \delta + 1 \; \text{и} \; \exists \delta_0^{''} = \delta + 2 \quad \mapsto$$

$$\mapsto \left| \int\limits_{\delta_0^{'}}^{\delta_0^{''}} e^{-(x-\alpha)^2}\, dx \right| \geq \; e^{-(\delta_0^{'} - \alpha_0)^2} \left(\delta_0^{''} - \delta_0^{'} \right) =$$

$$= e^{-((\delta+1)-\delta)^2} \left((\delta+2) - (\delta+1) \right) = \frac{1}{e} = \varepsilon_0 \; .$$

Что означает отсутствие равномерной сходимости интеграла на множестве $\alpha \in (0, +\infty)$.

Пример 5. Исследовать на равномерную сходимость интегралы $\Phi_1(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ и $\Phi_2(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$ на множестве: $\alpha \geq \alpha_0 > 0$.

Решение. 1) Для исследования интеграла $\Phi_1(\alpha)$ применим признак Дирихле. Интеграл вида $\int\limits_1^{+\infty} f(x,\alpha) g(x,\alpha)\, dx$ сходится равномерно по α на множестве Ω, если на множестве $x \in [1, +\infty)$ при каждом $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ функции $f(x,\alpha)$, $g(x,\alpha)$ и $g_x^{'}(x,\alpha)$ непрерывны по x и удовлетворяют условиям:

В данном случае пусть $f(x,\alpha) = \sin x$. Она непрерывна и $g(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$ непрерывно дифференцируема по x. Тогда имеем

1°. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$ при $\forall \alpha > 0$, а равномерность этого предельного перехода вытекает из очевидного неравенства

$$\frac{1}{x^{\alpha_0}} \geq \frac{1}{x^\alpha} \qquad \forall x \in [1, +\infty), \forall \alpha \in [\alpha_0, +\infty).$$

2°. функция $g_x^{'}(x,\alpha) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ знакопостоянна на $x \in [1, +\infty)$ при каждом $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, 3°. Наконец, $\left|\int\limits_1^x \sin u\, du\right| = \left|-\cos x + \cos 1\right| \le M = 1 \quad x \in [1, +\infty)\forall$

при каждом $\alpha \ge \alpha_0 > 0$

Значит (по признаку Дирихле) интеграл $\Phi_1(\alpha)$ сходится равномерно.

2). Рассмотрим теперь случай интеграла $\Phi_2(\alpha)$. Здесь не будет выполняться условие 2°. Действительно, функция $g_x^{'}(x,\alpha) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} + \cos x$ не является знакопостоянной на $x \in [1, +\infty)$. Иными словами, предельный переход 1° имеет место, но он *немонотонный*. Следовательно, признак Дирихле здесь бесполезен.

Применим для исследования сходимости $\Phi_2(\alpha)$ другой инструмент: формулу Тейлора в сочетании с доказанной ранее в курсе математического анализа теоремы о том, что,

если интеграл $\Phi(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$, где интеграл $Q(\alpha)$ сходится равномерно и абсолютно, то интегралы $\Phi(\alpha)$ и $P(\alpha)$ имеют один и тот же вид сходимости (или расходимости).

При помощи формулы Тейлора при $x \to +\infty$ получаем равенства

$$\frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \frac{\dfrac{\sin x}{x^\alpha}}{1 + \dfrac{\sin x}{x^\alpha}} = \frac{\sin x}{x^\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{x^\alpha} + \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right).$$

Откуда интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$ эквивалентен по характеру сходимости интегралу $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} dx$, поскольку интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится (как было показано выше) равномерно по признаку Дирихле, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} o\left(\dfrac{1}{x^{3\alpha}}\right) dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса (докажите это самостоятельно).

Осталось разобраться с видом сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} dx$. Если вспомнить материал 2 семестра, то ответ будет такой:

интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} dx$, а, значит и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$, не сходится при $\alpha \le \dfrac{1}{2}$ и сходится равномерно в случае $\alpha > \dfrac{1}{2}$.