СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ
по предмету
# «ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МФТИ, 2 курс, весенний семестр

Умнов А.Е.

*Материал для занятия 22 апреля 2020 года.*

## ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Необходимость использования несобственных интегралов, зависящих от параметра, нередко возникает в различных прикладных математических и физических задачах.

### Эйлеровы интегралы

На практике оказалось, что многие задачи приводят к специальному классу функций, называемых *эйлеровыми интегралами*.

Определение 1. *Эйлеровым интегралом первого рода* (или *бета-функцией*) называется функция двух переменных вида

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \ ,$$

. *Эйлеровым интегралом второго рода* (или *гамма-функцией*) называется функция вида

$$\Gamma(p)=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx \ .$$

Одним из первых, кто исследовал эти функции, был двадцатидвухлетний Леонард Эйлер, что дало повод Адриену Лежандру позднее назвать их эйлеровыми интегралами. Со временем оказалось, что число приложений, которые так или иначе связаны с эйлеровыми интегралами, настольно велико, что целесообразно их выделение в особый класс функций.

Перечислим (без обоснования) основные свойства эйлеровых интегралов.

1) Область определения: $B(\alpha,\beta)$ существует $\forall\alpha,\beta\in(0,1)$, $\Gamma(p)$ − $\forall p>0$,

2) $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$ "*симметричность*",

3) $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ , выражение бета-функции через гамма-функцию,

4) $\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p)\quad p\ge 1$ свойство "*понижения*",

5) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin\pi p}\quad p\in(0,1)$ свойство "*дополнения*".

Гамма и бета-функции являются удобным средством для вычисления некоторых интегралов, в частности многих интегралов, которые "не берутся" в элементарных функциях.

Для эйлеровых интегралов имеются компьютерные процедуры нахождения значений, и потому при вычислениях они могут использоваться наравне с элементарными функциями.

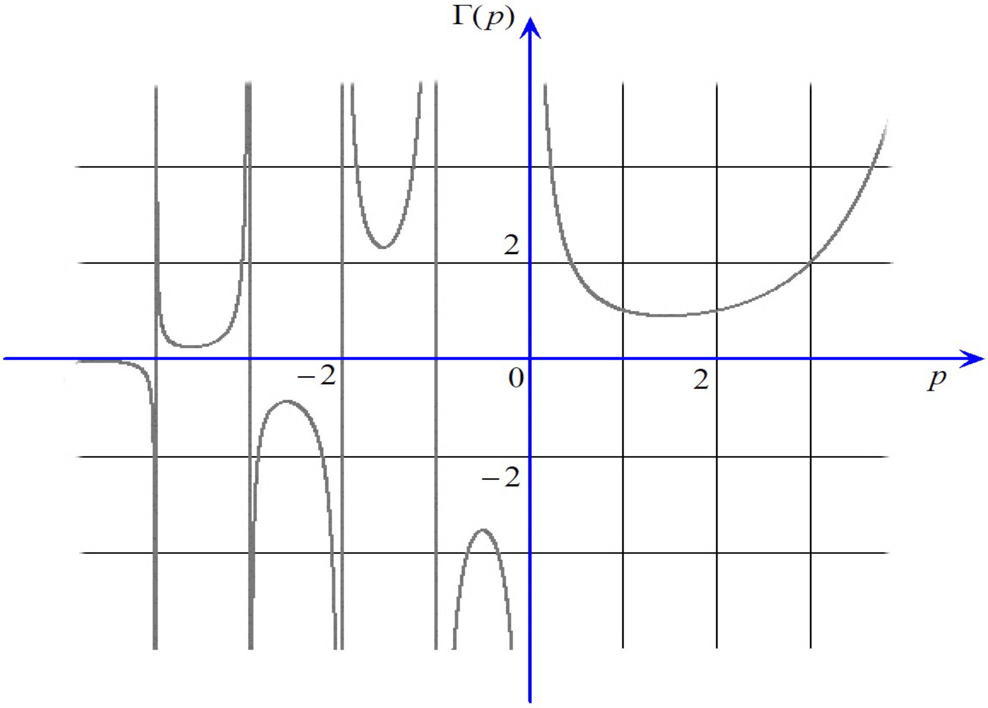
Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Формула 4) доказывается непосредственно интегрированием "по частям". При этом оказываются верными равенства:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) =$$
$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n!\cdot\Gamma(1)$$

или $\Gamma(n+1) = n!$, поскольку очевидно ☺, что $\Gamma(1) = 1$. Откуда следует, что $\Gamma(p+1)$ может рассматриваться как *обобщение определения* факториала на любое положительное число.

Пусть теперь $p$ вещественное, но неравное $0, -1, -2, -3, \ldots$, число. Тогда формулу 4) можно принять за <u>определение</u> *гамма-функции* на "почти всю" вещественную ось. Графическая интерпретация результата такого определения имеет следующий интересный вид:




Наконец, как вы узнаете в дальнейшем из курса ТФКП, еще более интересные и полезные результаты получаются при расширении области определения *гамма-функции* на комплексную плоскость.

Пример 2. Найти значение "неберущегося" интеграла Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Сделаем замену переменной интегрирования:

$u = x^2, \quad 2xdx = du, \quad dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$ в интеграле Пуассона, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

поскольку из 5) - свойства "дополнения" имеем

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi .$$

Следует заметить (ибо это может оказаться полезным), что *бета-функция* допускает другие формы своей записи. Например, сделав замену $x = \cos^2\varphi$ с $dx = -2\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$, мы получим в uитоге $B(\alpha,\beta) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha-1}\varphi\cdot\sin^{2\beta-1}\varphi\, d\varphi$.

А, если использовать замену $x = \dfrac{u}{u+1}$ и $dx = \dfrac{du}{(1+u)^2}$, то *бета-функция* может быть представлена с $u \in (0,+\infty)$ как

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}du}{(1+u)^{\alpha+\beta}}. \tag{1}$$

*Эйлеровы интегралы* настолько хорошо исследованы, описаны и запрограммированы, что можно задачу считать решенной, если ответ выражен через *бета-* и *гамма-функции*.

Пример 3. Найти при $a > -1$ и $b > -1$ интеграл $I(a,b) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\, \cos^b x\, dx$ .

Сделав замену $\sin x = \sqrt{u}$ и применив определение (1), получим

$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^{\frac{a-1}{2}}(1-u)^{\frac{b-1}{2}}du = \frac{1}{2}B\left(\frac{a-1}{2},\frac{b-1}{2}\right).$$

Следующие примеры демонстрируют многообразие возможностей использования *эйлеровых интегралов*.

Пример 4. Вычислить несобственный интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^3+1}$ .

Этот интеграл "берущийся", поскольку он берется от дробно-рациональной функции. Применив разложение на простейшие дроби (вспоминаем письменный экзамен по МА весной на 1 курсе), из

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C ,$$

получим (проверьте!), что $I = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Однако, подобных скучных выкладок можно избежать, если заметить, что при замене $u = x^3$ в силу формулы (1) получим

$$I=\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}\frac{du}{(u+1)\sqrt[3]{u^2}}=\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty}\frac{u^{\frac{1}{3}-1}du}{(u+1)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\otimes\ .$$

Но тогда из свойств 3) и 5) вытекают равенства:

$$\otimes=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\ .$$

Аналогичным методом можно решить и

Пример 5. Вычислить несобственный интеграл $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^{2a-1}x\,dx$ при $a\in(0,1)$ .

Сделаем замену $\operatorname{tg}x=\sqrt{u}$ при $u>0$. Тогда $dx=\frac{1}{1+u}\cdot\frac{du}{2\sqrt{u}}$ и, следовательно, $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^{2a-1}x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}u^{\frac{2a-1}{2}}\frac{1}{1+u}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{(1+u)^1}du=\otimes$ .

Применим опять свойства 3) и 4), что даст нам окончательно

$$\otimes=\frac{1}{2}B(a,1-a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{a}}\ .$$

**Интеграл Фурье**

Как мы видели ранее, каждой абсолютно интегрируемой на отрезке $[-A,A]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие, определенную на $\mathbf{R}$, $2A$-периодическую функцию $\Phi(x)$ вида

$$\Phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{A}+b_k\sin\frac{\pi kx}{A}\right)\ , \tag{2}$$

называемую *рядом Фурье*, где коэффициенты $a_k$ и $b_k$ определялись по формулам

$$a_0=\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(u)\,du,\quad a_k=\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(u)\cos\frac{\pi ku}{A}du\quad\forall k\in\mathbf{N}\quad\text{и}\quad b_k=\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(u)\sin\frac{\pi ku}{A}du\quad\forall k\in\mathbf{N}\,.$$

Тогда $\forall x\in(-A,A)\quad\Phi(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ .

Пусть теперь функция $f(x)$ абсолютно интегрируемая $\forall x\in(-\infty,+\infty)$. По аналогии с формулой (2), заменив операцию суммирования интегрированием, поставим ей в соответствие функцию $\Upsilon(x)$, являющуюся несобственным интегралом, зависящим от параметра $x\in(0,+\infty)$, вида

$$Y(x)=\int_{0}^{+\infty}\big(a(u)\cos xu+b(u)\sin xu\big)du\,, \tag{3}$$

где $a(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt$ и $b(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt$ .

Имеет место

Теорема 1. Если, кроме того, $f(x)$ кусочно-непрерывна на любом отрезке, а в точке $x$ имеет односторонние производные, то будет верно равенство $Y(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Таким образом, функции $a(u)$ и $b(u)$ могут рассматриваться (по аналогии с последовательностями $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, которые являются дискретным спектром периодической функции) как непрерывные спектры непериодической функции $f(x)$. А сама функция $Y(x)$, называемая *интегралом Фурье*, может интерпретироваться как гармоническое разложение для непериодической функции.

Для иллюстрации этой интерпретации рассмотрим

Пример 6. Представить интегралом Фурье для $\tau = 10$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ при } |x| \le \tau, \\ 0, \text{ при } |x| > \tau. \end{cases}.$$

Поскольку функция $f(x)$ четная, то очевидно, что $b(u) \equiv 0$. Для $a(u)$ имеем

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(u)\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\tau}\cos ut\,dt=\frac{2\sin\tau u}{u}.$$

Следовательно, искомое представление будет $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\tau u\cdot\cos xu}{u}\,du$.

Ниже приводится график непрерывной спектральной функции $a(u)$.