СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ по предмету

«ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МФТИ, 2 курс, весенний семестр

Умнов А.Е. *Материал для занятий 06 мая 2020 года.*

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Формализм связи ряда Фурье и интеграла Фурье

Приведем сопоставление определений и свойств ряда и интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$.

Дано: функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на отрезке $[-A, A]$, $A > 0$.	Дано: функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируемая $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, и кусочно-непрерывна на любом отрезке
Ей сопоставляется функция $\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{A} + b_k \sin \frac{\pi k x}{A} \right)$, (1)	Ей сопоставляется функция $Y(x) = \int\limits_0^{+\infty} \big(a(\omega) \cos \omega x + b(u) \sin \omega x \big) d\omega$ (2)
Где $a_0 = \frac{1}{A} \int\limits_{-A}^{A} f(t)\, dt$, $a_k = \frac{1}{A} \int\limits_{-A}^{A} f(t) \cos \frac{\pi k t}{A} dt \quad \forall k \in \mathbf{N}$ $b_k = \frac{1}{A} \int\limits_{-A}^{A} f(t) \sin \frac{\pi k t}{A} dt \quad \forall k \in \mathbf{N}$	Где $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t\, dt$ $b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t\, dt$
Справедливо равенство $\lim\limits_{x \to x_0} \Phi(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \; \forall x_0 \in (-A, A)$	Справедливо равенство $\lim\limits_{x \to x_0} Y(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \; \forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$
Функция $\Phi(x)$ определена на $x \in (-\infty, +\infty)$, $2A$*-периодическая*	Функция $Y(x)$, определена на $x \in (-\infty, +\infty)$, вообще говоря, *непериодическая*
Последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, называются *дискретным спектром* $f(x)$	Функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$, $\omega \in (0, +\infty)$, называются *непрерывным спектром* функции $f(x)$.

Сопоставление, описываемое этой таблицей, было сделано, честно говоря, на основании соображений типа "заметим, что..." Однако, связь ряда Фурье и интеграла Фурье может быть продемонстрирована более наглядно и естественно при помощи следующего предельного перехода в стандартной римановской интегральной сумме.

Сделаем следующие преобразования, исходя из формулы (1).

$$J(x,A)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{A}+b_k\sin\frac{\pi kx}{A}\right)=$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\cos\frac{\pi kt}{A}dt\right)\cos\frac{\pi kx}{A}+\left(\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\sin\frac{\pi kt}{A}dt\right)\sin\frac{\pi kx}{A}\right)=$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\left(\cos\frac{\pi kt}{A}\cdot\cos\frac{\pi kx}{A}+\sin\frac{\pi kt}{A}\cdot\sin\frac{\pi kx}{A}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\cos\frac{\pi k}{A}(x-t)dt\,. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию $\Psi(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A}f(t)\cos\omega(t-x)dt$, определенную для $\omega\in(0,A)$. Построим для нее *римановскую интегральную сумму* вида $\sigma_N=\sum\limits_{k=1}^{N}\Delta_k\Psi(\omega_k)$, в которой $\Delta_k=\frac{A}{N}$ − мелкость разбиения промежутка $(0,A]$, а $\omega_k=\frac{\pi k}{A}$ принадлежит k-му участку разбиения.

Тогда, с учетом $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{2A}\int\limits_{-A}^{A}|\,f(t)\,|\,dt=0$, переход в (3) к пределу дает

$$\lim_{A\to+\infty}J(x,A)=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\Delta_k\Psi(\omega_k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x\right)d\omega=Y(x)\,, \tag{4}$$

где $a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$ и $b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$.

Здесь важно, однако, понимать, что в этих формулах были объединены в один сразу три предельных перехода:

- переход от интегральной суммы к определенному интегралу за счет устремления мелкости разбиения к нулю;
- переход от определенного интеграла к несобственному в особой точке $+\infty$;
- переход от определенного интеграла к несобственному в особой точке $-\infty$.

При этом совместное выполнение предельных переходов первого со вторым, равно как первого с третьим вполне корректно. Но совместное выполнение второго и третьего перехода явно нарушает определение существования несобственного интеграла с несколькими особыми точками (в нем требуется существование интеграла во *всех* особых точках при *независимых* предельных переходах к каждой из них). Этот вопрос мы рассмотрим позднее.

Интеграл Фурье имеет многочисленные приложения в задачах механики и физики. При этом также часто оказывается востребованным тесно с ним связанный, комплекснозначный математический объект, называемый *преобразованием Фурье.*

Разберемся вначале, что это такое. Из (4) имеем, $Y(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt$.

Тогда, приняв во внимание, что выражение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt$ есть четная функция по переменной ω, а выражение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)dt$ нечетная, получим

$$Y(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt \quad \text{и} \quad 0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)dt .$$

Умножим теперь обе части второго равенства на мнимую единицу и затем сложим их почленно.

$$Y(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\big(\cos\omega(x-t)+i\sin\omega(x-t)\big)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}dt .$$

Здесь мы использовали формулу Эйлера.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то $Y(x)=f(x)$ и последнее равенство можно записать в симметричной форме $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega x}d\omega\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$. (5)

Здесь придется сделать "лирическое отступление" и вспомнить, что внешний интеграл в формуле (5) (то есть, интеграл по переменной ω) есть не просто несобственный интеграл с двумя особыми точками $+\infty$ и $-\infty$. Предельный переход в обеих точках мы делали "синхронно", что запрещено по определению в обычном несобственном интеграле . Иначе говоря, тут мы имеем дело с каким-то особым видом несобственных интегралов. Это различие пояснит

`Пример 1.` Найти $I=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x}$.

Этот интеграл несобственный, имеющий две особые точки: "$+0$" и "-0". Для его сходимости необходимо, чтобы он сходился в каждой из них. Возьмем, например, "$+0$". Имеем

$$I_{+0}=\int\limits_{\to+0}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}=-\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon=+\infty$$

Интеграл I_{+0} расходится, значит, расходится и интеграл I. Заметим, что также расходится и интеграл I_{-0}.

Теперь выполним предельный переход в точках "$+0$" и "-0" "синхронно", используя ту же схему, что и при выводе формулы (4):

$$I_{?}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=0 .$$

Откуда следует, что интеграл сходится.

Чтобы выделить несобственные интегралы такого рода, Коши предложил называть их интегралами *в смысле главного значения* и обозначать символом "v.p." (от фр. *valeur* *principale*). Так что, $\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0$. Понятно, что из сходимости несобственного интеграла в обычном смысле следует его сходимость в смысле главного значения, но не наоборот.

Для решения практических задач оказалось удобным, исходя из формулы (5), дать

Определение 1. Функция $\hat{f}(\omega)=\text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ называется *преобразованием Фурье* функции $f(x)$, а функция $\tilde{f}(\omega)=\text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\omega x}dx$ – обратным преобразованием Фурье.

Часто также используются обозначения $\hat{f}(\omega)=F[f]$ и $\tilde{f}(\omega)=F^{-1}[f]$.

Пример 2. Найти *обратное* преобразование Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{при} \mid x \mid \le u,\\ 0, \text{при} \mid x \mid > u.\end{cases}.$$

Для $\tilde{f}(\omega)$ имеем

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\omega x}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-u}^{u}e^{i\omega x}\,dx=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{i\omega u}-e^{-i\omega u}}{2i\omega}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin u\omega}{\omega}.$$

Пример 3. Найти преобразование Фурье для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Для $\tilde{f}(\omega)$ имеем

$$\tilde{f}(\omega)=F\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-i\omega x}\,dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,dx-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega x)}{1+x^2}\,dx=$$

в силу четности косинуса и нечетности синуса, а также используя значение интеграла Лапласа, получаем

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}.$$

Свойства преобразования Фурье

Сформулируем (без доказательства) основные свойства преобразования Фурье.

1°. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbf{R}$, тогда $\hat{f}(\omega)$ непрерывная и ограниченная на $\mathbf{R}$ функция у которой $\lim_{\omega\to\pm\infty}\hat{f}(\omega)=0$.

2⁰. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и имеет конечные односторонние производные на $\mathbf{R}$, тогда $F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f$.

3⁰. Линейность преобразования Фурье: если преобразования Фурье от функций f и g существуют, то для любых комплексных λ и μ верно равенство
$$F[\lambda f + \mu g] = \lambda F[f] + \mu F[g].$$

4⁰. *Преобразование Фурье от производной функции*: если производные функции $f^{(k)}(x)$ $k = 0,1,2,\dots n$ непрерывно дифференцируемы и абсолютно интегрируемы, то
$$\forall k = [1,n] \qquad F[f^{(k)}] = (i\omega)^k F[f].$$
При этом $\exists C > 0$ такое, что $\left| F[f] \right| \le \dfrac{C}{\left| \omega^n \right|}$.

Другими словами, чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция, тем быстрее стремиться к нулю на бесконечности ее преобразование Фурье.

5⁰. *Производная преобразования Фурье*: пусть функция $f(x)$ непрерывна, а функции вида $x^k f(x)$ $\forall k = 0,1,2,\dots n$ абсолютно интегрируемы на $\mathbf{R}$, тогда ее преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$ есть n раз дифференцируемая на $\mathbf{R}$ функция. При этом
$$\hat{f}^{(k)}(\omega) = (-i)^k F[x^k f(x)] \quad k = [1,n].$$

Использование свойств преобразования Фурье проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 4. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{1+\left|x^5\right|}$. Показать, что

1) $\hat{f}(\omega)$ имеет на $\mathbf{R}$ непрерывную производную третьего порядка;

2). $\hat{f}(\omega) = O\left(\dfrac{1}{\omega^5}\right)$ при $\omega \to \infty$.

Решение:

1) Достаточные условия интегрируемости (признак сравнения) функции $f(x) = \dfrac{x^k}{1+\left|x^5\right|}$ суть $k = 1,2,3$. Значит, по свойству 5⁰ $\hat{f}(\omega) = F[f]$ имеет производные до третьего порядка включительно.

2) Функция $\dfrac{1}{1+\left|x^5\right|}$ имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно и кусочно-непрерывную *пятую* производную вида $120\,\mathrm{sign}(x)$. Тогда из свойства 4⁰ получаем требуемую оценку.

Пример 5. На множестве $x \in \mathbf{R}, t \ge 0$ найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ − *теплопроводности* такую, что $u(x,0) = u_0(x)$.

Решение: введем следующие обозначения: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = u_t'$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_x'$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}''$. Кроме того, будем предполагать, что функции $u(x,t), u_x'(x,t), u_{xx}''(x,t)$ абсолютно интегрируемы по x на всей вещественной оси при каждом $t \ge 0$. Наконец, также условимся, что $\exists \varphi(x): \forall t \ge 0 \ \left| u_t^{/}(x,t) \right| \le \varphi(x)$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx < +\infty$. (6)

<u>*Основная идея*</u>: к обеим частям уравнения $u_t^{/} = u_{xx}^{//}$ применим преобразование Фурье по x, считая t параметром.

Пусть $F[u(\omega,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx$. Для большей наглядности мы не будем применять свойство 4º, а используем непосредственно определение преобразования Фурье. Тогда, проинтегрировав два раза по частям и учтя, что проинтегрированные слагаемые в силу (6) зануляются, получим равенства

$$F[u_{xx}^{//}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{zz}^{//} e^{-i\omega z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(u_z^{/} e^{-i\omega z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_z^{/} e^{-i\omega z} dz \right) =$$

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \left(u e^{-i\omega z} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\omega z} dz \right) = -\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\omega z} dz = -\omega^2 F[u]$$

С другой стороны, в силу сделанных предположений, и, поскольку в преобразованному по Фурье уравнению, ω − параметр, $F[u_t^{/}] = F\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{dF}{dt}$. И таким образом, исходное уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (где неизвестным является функция F) вида:

$$\frac{dF}{dt} = -\omega^2 F,$$

общее решение которого есть семейство функций $\hat{f}(\omega,t) = D(\omega) e^{-\omega^2 t}$.

Начальным условием при $t = 0$ в нашей задаче является функция $u_0(x)$, преобразование которой по Фурье − функция $D(\omega)$. Это означает, что $D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(z) e^{-i\omega z} dz$.

В итоге получаем, что искомое *решение уравнения теплопроводности* находится путем применения к функции $\hat{f}(\omega,t)$ *обратного* преобразования Фурье.

Следовательно, $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} D(\omega) e^{i\omega x - \omega^2 t} d\omega$, где $D(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(z) e^{-i\omega z} dz$.

Например (проверьте самостоятельно, использовав решение задачи §17, №8(2)), что, если $u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, то $\hat{f}(\omega,t) = e^{-\omega^2\left(t + \frac{1}{2}\right)}$. Откуда получается, что

$$u(x,t) = F^{-1}\left[e^{-\omega^2\left(t+\frac{1}{2}\right)} \right] = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+2}}.$$