

## ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

### Определение и основные свойства

В большом числе случаев формулировку физического закона, описание явления или процесса удается выполнить, используя понятие *функции многих переменных* – правила, устанавливающего *однозначное соответствие* между двумя множествами, первое из которых состоит из конечных упорядоченных наборов чисел – "векторов", а второе – состоит из чисел.

Однако в процессе развития физики выяснилось, что этого инструмента может оказаться недостаточно.

Например, при помощи функций не удается построить корректное количественное описание  $\rho_M(x, r)$  – пространственной *плотности материальной точки с центром в  $r$  и конечной массы  $M$* .

С физической точки зрения, из равенства  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_M(x, r) dx = M$  следует *неограниченное возрастание*  $\rho_M(x, r)$  при неограниченном приближении  $x$  к  $r$ , что невозможно.

Об этой "теоретической неприятности" физики знали со времен Ньютона-Лейбница, но особо не расстраивались, поскольку измерить практически можно было *только интеграл от  $\rho_M(x, r)$* , а "функция плотности"  $\rho_M(x, r)$  для материальной точки смысла не имела.

Рассмотрим эту проблему с формальной, математической точки зрения. При этом предположим, что все используемые в записях интегралы имеют смысл, а  $r$  – произвольный фиксированный вещественный параметр.

Заметим, что, если пользоваться только понятием "функция", то решения задачи:

$$\text{найти функцию } f(x, r) \text{ такую, что } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, r) \varphi(x) dx = \varphi(r), \quad (1)$$

не существует. Попросту говоря, нет такой функции  $f(x, r)$ , которая "умела бы делать" то, что требует равенство (1).

Но чем тогда может в принципе являться решение этой задачи?

Равенство (1) каждой допустимой функции  $\varphi(x)$  ставит в соответствие *единственное* число  $f(\varphi(x))$ . Иначе говоря, условие (1) определяет некоторую зависимость, **аргументом** которой является обычная *функция*, в то время как, **значение** этой зависимости есть *число*.

Зависимости такого вида в математике известны. Например,

- каждому из геометрических векторов можно поставить в однозначное соответствие его длину,
- каждой квадратной матрице порядка  $n$  можно поставить в соответствие ее детерминант,
- каждой, непрерывной на некотором промежутке вещественной оси можно поставить в однозначное соответствие ее определенный интеграл.

Зависимости подобного типа принято называть *функционалами*. Их можно определить, например, так:

будем говорить, что на некотором множестве математических объектов  $X$  задан *функционал*, имеющий значения в числовом множестве  $Y$ , если задано правило, по которому *каждому* элементу из  $X$  поставлено в соответствие *единственное* число из  $Y$ .

Общепринятого единообразного обозначения для функционалов нет. Хотя достаточно часто используются функцеподобные формы записи, типа  $Y(X)$ . Вполне уместные, поскольку в случае, когда  $X$  есть числовое (или "векторное") множество, определения функционалов и функций совпадают.

При определении функционалов требования к свойствам множества  $X$  могут весьма широко варьироваться в зависимости от рассматриваемой задачи. Воспользуемся этой свободой при определении свойств области определения функционалов, которые могут являться решениями задач вида (1).

Эта область определения, обычно обозначаемая как  $D$ , состоит из функций  $\varphi(x)$ .

Не будем здесь скрывать наших, далеко идущих планов: набор требований, формулируемых ниже, позволит в перспективе строить методы решения задач существенно более серьезных, чем задача (1).

Речь идет о задачах Коши, краевых и смешанных задачах для дифференциальных уравнений *в частных производных второго порядка*, называемых обычно *уравнениями математической физики*.

Сформулируем требования как индивидуально для функций  $\varphi(x)$ , являющихся функциями одной вещественной переменной, так и для всей их совокупности.

1°. Пусть функции  $\varphi(x) \in D$  определены на *всей* вещественной оси и имеют на  $\mathbf{R}$  производную *любого* порядка;

2°.  $\exists a \geq 0: \forall x: |x| \geq |a| \mapsto \varphi(x) \equiv 0$  .

Функции, удовлетворяющие условию 2°, принято называть *финитными*, а, одновременно 1° и 2°, – *основными*.

Пример 1: основной является функция-"шапочка", задаваемая формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{4}{4-x^2}}, & \text{при } |x| < 2, \\ 0, & \text{при } |x| \geq 2, \end{cases} \text{ график которой показан на рис.1.}$$

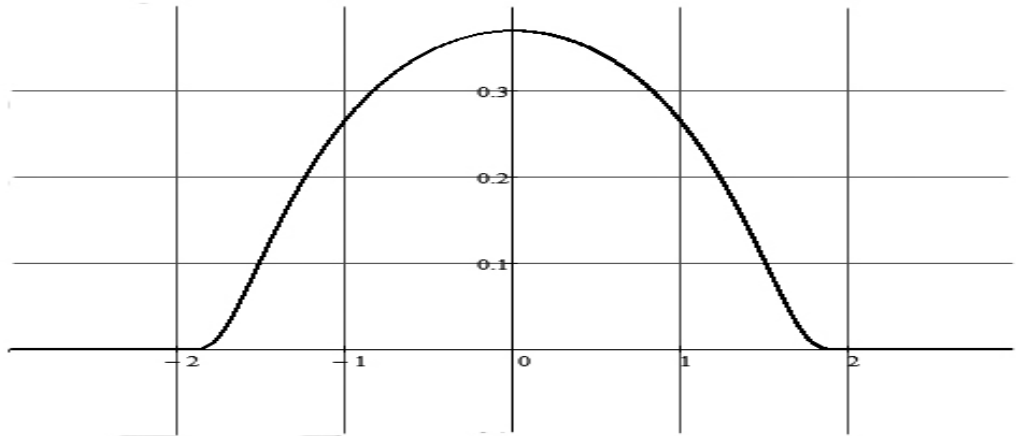


Рис. 1. Пример основной функции.

Нетрудно установить, что множество  $D$  является *линейным пространством* со стандартно введенными операциями сложения и умножения числа на элемент.

Определим теперь *сходимость* последовательности  $\{\varphi_{(k)}(x)\}$  элементов в  $D$ . Символ  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{(k)}(x) = \varphi^*(x)$  будет означать, что на множестве  $\mathbf{R}$  имеет место *равномерная по  $x$  сходимость* самой последовательности, так и для последовательностей из производных *любого* порядка  $\varphi_{(k)}^{(n)}(x) \Rightarrow \varphi^{*(n)} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$ .

Следует отметить, что данное определение сходимости не может быть сведено к использованию какой-либо метрики (см., например, Петрович А.Ю., Ч.3 Стр. 292-293).

Пример 2: последовательность основных функций вида  $\varphi_{(k)}(x) = \frac{\varphi^*(x)}{n}$ , где  $\varphi^*(x)$  – функция-"шапочка", сходится в  $D$  к функции тождественно равной нулю на множестве всех вещественных чисел  $\mathbf{R}$ .



Перейдем теперь к определению функционалов в пространстве  $D$  – основных функций. Итак, мы называем *функционалом в пространстве  $D$*  правило, по которому каждой основной функции  $\varphi(x)$  ставится в соответствие *единственное* число  $\mathcal{F}(\varphi(x)) \in \mathbf{R}$ .

Заметим также, что функционалы, определенные на  $D$ , можно складывать и умножать на число. В результате будут получаться новые функционалы.

Используя свойства пространства основных функций  $D$ , среди всевозможных видов функционалов можно выделить специальный класс, элементы которого мы назовем *линейными* и *непрерывными* функционалами. Приведем его определение.

Определение 1.: Функционал  $\mathcal{F}(\varphi)$  называется *линейным* в  $D$ , если  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$  и  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$  выполняется равенство

$$\mathcal{F}(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\mathcal{F}(\varphi_1) + \lambda_2\mathcal{F}(\varphi_2) .$$

Определение 2.: Функционал  $\mathcal{F}(\varphi)$  называется *непрерывным* в  $D$ , если  $\forall \{\varphi_{(k)}\}$  сходящейся к  $\varphi^*(x)$  в  $D$ , имеет место  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi_{(k)}(x)) = \mathcal{F}(\varphi^*(x))$ .

Теперь будем рассматривать *только* линейные и непрерывные функционалы в  $D$ , которые будем называть, следуя сложившейся традиции. *обобщенными функциями*.

Нетрудно заметить, что *в полной своей совокупности* с операциями сложения функционалов и умножения числа на функционал, обобщенные функции образуют линейное пространство. Его принято обозначать  $D'$ .

То, что функционалы принято называть функциями, нам придется проглотить. Это — не очень хорошо, конечно.

А вот, прилагательное *обобщенные* наводит на вполне законный вопрос, а что, собственно говоря, рассматриваемые нами функционалы обобщают?

Возвращаясь к задачам вида (1), получаем следующее объяснение.

Пусть функция  $f(x)$  абсолютно интегрируемая на любом промежутке вещественной оси. Тогда (это теорема!) интеграл вида

$$\mathcal{G}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (2)$$

есть линейный и непрерывный функционал на  $D$ . То есть, функционал  $\mathcal{G}(\varphi) \in D'$ .

Значит, часть функционалов из  $D'$  может быть определена по формуле (2) при помощи обычных, абсолютно интегрируемых функций  $f(x)$ . Такие обобщенные функции будем называть *регулярными*. Все прочие – *сингулярными*.

Это и дает повод использовать термин *обобщенные* для обозначения множества  $D'$  – совокупности регулярных и сингулярных функционалов.

Итак, регулярные обобщенные функции определяются при помощи (2).

Способы же описания сингулярных обобщенных функций могут быть самыми разнообразными, хоть стихами. Рассмотрим

Пример 3: Пусть функционал  $\mathcal{F}(\varphi)$  ставит в соответствие основной функции  $\varphi(x)$  ее значение в точке  $a \in \mathbf{R}$ . Показать, что эта  $\mathcal{F}(\varphi) \in D'$ .

Решение: То, что  $\mathcal{F}(\varphi) = \varphi(a) \in \mathbf{R}$  есть функционал на  $D$ , — очевидно. Покажем, что он линейный и непрерывный.

Имеем  $\mathcal{F}(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\varphi_1(a) + \lambda_2\varphi_2(a) = \lambda_1\mathcal{F}(\varphi_1) + \lambda_2\mathcal{F}(\varphi_2)$ . Это доказывает линейность.

Если имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{(k)}(x) = \varphi^*(x)$ , то по определению сходимости в  $D$   $\varphi_{(k)}^{(n)}(x) \Rightarrow \varphi^{*(n)} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$ . Но это значит, что  $\varphi_{(k)}(a) \rightarrow \varphi^*(a)$ . Откуда следует, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi_{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{(k)}(a) = \varphi^*(a) = \mathcal{F}(\varphi^*)$ . Таким образом, доказана и непрерывность.

Рассмотренная в примере 3 обобщенная функция имеет специальное наименование. Ее называют — *дельта-функция Дирака* или, просто, *дельта-функция*. Ее стандартное обозначение  $\delta_a(x)$ .

Важным способом связи между регулярными и сингулярными обобщенными функциями является *предельный переход*, т.е., когда сингулярная обобщенная функция может быть представлена как предел последовательности регулярных функционалов в  $D'$ .

Пример 4: Покажем, что в  $D'$  для дельта-функции Дирака  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta_0(x)$ .

Решение: При любом положительном  $\varepsilon$  функция  $f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$  будет определять  $\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi)$  – регулярную обобщенную функцию в  $D'$ . Предположим, что в силу финитности,  $\exists 0 \leq A < +\infty$  такое, что все  $\varphi(x)$  основные функции равны нулю вне отрезка  $[-A, A]$ . Тогда будут справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\varepsilon(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-A}^{+A} f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} (\varphi(0) + \varphi(x) - \varphi(0)) dx = \varepsilon \varphi(0) \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} + \varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого имеем:

$$\varepsilon \varphi(0) \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = 2\varepsilon \varphi(0) \int_0^{+A} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon \varphi(0)}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{A}{\varepsilon} = 2\varphi(0) \operatorname{arctg} \frac{A}{\varepsilon} \rightarrow \pi \varphi(0).$$

Для второго слагаемого в силу оценки, следующей из теоремы Лагранжа:

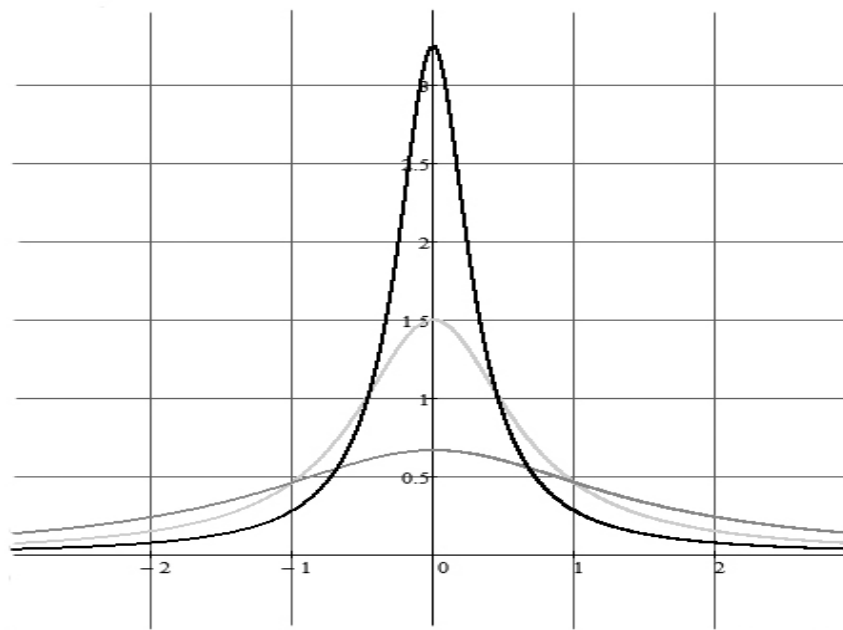
$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |x\varphi'(\xi)| \leq |x| \max_{x \in [-A, +A]} |\varphi'(x)| = C|x|$$

получим

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right| &\leq \varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{x^2 + \varepsilon^2} dx \leq C\varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{|x| dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \\ &= C\varepsilon \int_0^{+A} \frac{2x dx}{x^2 + \varepsilon^2} = C\varepsilon \ln(x^2 + \varepsilon^2) \Big|_0^A = C\varepsilon \ln(A^2 + \varepsilon^2) - 2C\varepsilon \ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} 0. \end{aligned}$$

Откуда получаем  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta_0(x)$ .

На рис.2 показаны графики  $f_\varepsilon(x)$  для различных значений  $\varepsilon$ .



Теперь обсудим, как принято записывать обобщенные функции. Заметим, что правая часть формулы (2) в регулярном случае совпадает с записью скалярного произведения, то

есть  $\mathcal{F}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx = (f, \varphi)$ . Можно сказать, что левая скобка и идентификатор функционала "рокировались".

Данное равенство, если распространить его и на сингулярные случаи, позволяет символически обозначать *любые* обобщенные функции символом  $(f, \varphi)$ , где  $f$  – идентификатор функционала, а  $\varphi$  обозначает его аргумент – основную функцию.

Заметим, что обратное переобозначение не всегда математически корректно. Например, из символически верного  $(\delta_a(x), \varphi) = \varphi(a)$  не следует  $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)$ , поскольку  $\delta_a(x)$  не функция и не имеет конкретного значения в точке  $x$ .

Тем не менее, подобные "формулы" можно иногда встретить в информационных ресурсах, где они используются для простоты при объяснениях "на пальцах".