

Операции с обобщенными функциями

Теперь мы рассмотрим случаи, в которых использование записи вида (f, φ) не только корректно, но и достаточно эффективно.

Суть приема такова: мы получаем символическую форму записи с функционалом некоторого "нового типа" для *регулярного* случая (когда использование интеграла допустимо), а потом (предварительно убедившись в линейности и непрерывности "новичка") используем эту форму записи и для *сингулярного* случая, принимая ее по определению.

Умножение обычной функции на обобщенную

Используем эту схему для определения в D' операции "умножения на функцию".

Пусть $g(x)$ – бесконечно дифференцируемая обычная функция. Что мы можем принять за $g(x)f(x)$, если $f(x) \in D'$?

В регулярном случае мы имеем $(g(x)f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\varphi(x) dx = (f, g(x)\varphi)$. По этому за функционал $g(x)f$ можно принять $(g(x)f, \varphi) = (f, g(x)\varphi)$.

Линейность и непрерывность нового функционала в этом определении проверьте самостоятельно.

Дифференцирование обобщенных функций

По этой же технологии можно определить и производную для обобщенной функции. Данное определение имеет вид

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') . \quad (1)$$

Действительно, для регулярной обобщенной функции $f(x)$, которая порождается обычной непрерывно дифференцируемой функцией, согласно правилу интегрирования по частям, имеем

$$f' = (f', \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x) dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x) dx = -(f, \varphi') ,$$

что и дает основание принять формулу (1) за определение производной от обобщенной функции.

Из формулы (1) следует, что

- каждая обобщенная функция имеет производную любого порядка,
- операция дифференцирования обобщенной функции *линейна*:

$$((\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)', \varphi) = \lambda_1 (f_1', \varphi) + \lambda_2 (f_2', \varphi).$$

Для обобщенных функций имеется аналог формулы Лейбница. Рассмотрим для примера случай $n = 1$.

Пусть $f(x)$ – произвольная обобщенная функция, а $g(x)$ – регулярная обобщенная функция, порождаемая бесконечно дифференцируемой обычной функцией. Тогда

$$\begin{aligned}(f \cdot g)' &= ((f \cdot g)', \varphi) = -((f \cdot g), \varphi') = -(f, g\varphi') = \\ &= -(f, (g \cdot \varphi)' - g'\varphi) = (f, g'\varphi) - (f, (g \cdot \varphi)') = \\ &= (fg', \varphi) + (f', g\varphi) = (fg', \varphi) + (f'g, \varphi) = \\ &= (f'g, \varphi) + (fg', \varphi) = (f'g + fg', \varphi) = f'g + fg'.\end{aligned}$$

Пример 1. Найти f' и f'' для обобщенной функции, порождаемой обычной функцией

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{при } x \leq 0, \\ \beta x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Решение: 1. Имеем

$$\begin{aligned} f' &= -(f, \varphi') = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\alpha \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx - \beta \int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx = \\ &= -\alpha \left(x \cdot \varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx \right) - \beta \left(x \cdot \varphi(x) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha + (\beta - \alpha)\theta(x)) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

$$\text{где функция Хевисайда } \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{в итоге, } f'(x) = \begin{cases} \alpha & \text{при } x < 0, \\ \frac{\alpha + \beta}{2} & \text{при } x = 0, \\ \beta & \text{при } x > 0. \end{cases} \text{ Или } f'(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\theta(x).$$

2. Для второй производной аналогичными рассуждениями получаем

$$\begin{aligned} f'' &= -(f', \varphi') = (f, \varphi'') = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi'(x) dx = -\alpha \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \beta \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \\ &= -\alpha \varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 - \beta \varphi(x) \Big|_0^{+\infty} = (\beta - \alpha) \varphi(0) = (\beta - \alpha) \delta(x). \end{aligned}$$

3. Если учесть, что при $\alpha = -1$ и $\beta = 1$ мы имеем $f(x) = |x|$, то в пространстве D' будут верны равенства $|x|' = \operatorname{sgn} x$ и $|x|'' = 2\delta(x)$.

Задача 1 иллюстрирует следующие правила дифференцирования регулярных обобщенных функций с разрывами 1-го рода, как у самих функций, так и у их производных.

Предположим, что порождающая функция непрерывна, но у ее производной есть разрыв первого рода в точке x_0 со "скачком" значения, равным A . Тогда производная обобщенной функции будет равна производной порождающей функции с добавкой вида $A\theta(x-x_0)$.

Если же скачок первого рода в точке x_0 величины A имеется у порождающей функции, то у ее обобщенной производной имеется слагаемое $A\delta(x-x_0)$.

Пример 2. Найти в D' вторую производную для регулярной функции $f(x) = |x| \sin x$.

Решение: По формуле Лейбница имеем

$$f'' = (|x| \sin x)'' = |x|'' \sin x + 2|x|'(\sin x)' + |x|(\sin x)''.$$

Поскольку $|x|' = \operatorname{sgn} x$ и $|x|'' = 2\delta(x)$, то получаем

$$f'' = 2\delta(x) \sin x + 2 \operatorname{sgn} x \cdot \cos x - |x| \sin x.$$

Эту формулу можно упростить, поскольку в D' $\delta(x) \sin x = 0$. Действительно, $(\delta(x) \sin x, \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x) \sin x) = \varphi(0) \sin 0 = 0$. Поэтому окончательно

$$f'' = 2 \operatorname{sgn} x \cdot \cos x - |x| \sin x.$$