

СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ
по предмету
«ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МФТИ, 2 курс, весенний семестр

УМНОВ А.Е.

28 марта 2020 года.

СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим *определенный* (римановский) интеграл от функции двух переменных $f(x, \alpha)$, определенной на замкнутом прямоугольнике $K : \{ a \leq x \leq b; c \leq \alpha \leq d \}$, который берется по переменной x в пределах от a до b . Понятно, что значение этого интеграла будет, вообще говоря, зависеть от значения α , при котором он берется.

Поскольку римановский интеграл по своему определению есть *предел* так называемой *римановской суммы*. Известно, что предел, если существует, то он единственный. Поэтому зависимость значения от величины α является функциональной. Проще говоря, в рассматриваемом случае данный интеграл есть функция переменной α :

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx . \quad (1)$$

Здесь возникает естественный вопрос: как свойства функции $\Phi(\alpha)$ зависят от свойств функции $f(x, \alpha)$? Или, более прагматически, можно ли, выполняя какую-либо операцию с функцией $\Phi(\alpha)$ (скажем, вычисления предела, дифференцирования или интегрирования по α), "переставлять" эту операцию и интегрирование в (1)?

Ответ: в общем случае этого делать нельзя. Поясним это следующим примером 1.

Пусть $\Phi(\alpha) = \int_a^b \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} dx$, $\alpha > 0$, требуется найти $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \Phi(\alpha)$.

Данный интеграл "берущийся", и из $\Phi(\alpha) = \arctg \frac{x}{\alpha}$ получаем, что $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \Phi(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ С дру-

гой стороны, $\int_a^b \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} dx = 0$.

Возможность изменения "порядка действий" для операций предельного перехода и вычисления римановского интеграла определяет следующая теорема 1:

Если функция $f(x, \alpha)$ непрерывна на $K : \{ a \leq x \leq b; c \leq \alpha \leq d \}$, то $\Phi(\alpha)$ непрерывна, а, значит и интегрируема на $[c, d]$.

Следует принять во внимание, что

- непрерывность функции $f(x, \alpha)$, как равенства значения и предела в точке, предполагает здесь *двойной (кратный)* предел, что является, с одной стороны, довольно жестким требованием, что и показывает пример 1;
- с другой стороны, выполнение этого жесткого условия позволяет в некоторых случаях находить значения "не берущихся" интегралов.

Пример 2. Найдите $I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_1^9 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx$.

Здесь не получится начать с формулы Ньютона-Лейбница, поскольку соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции. Однако в силу непрерывности подынтегральной функции двух переменных α и x , будут справедливы равенства $I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_1^9 \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^9 = 6$.

Пример 3. Найдите $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x} dx$, где $b > a > 0$.

Заметим, что $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^u du$. Тогда $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin \ln \frac{1}{x} dx = - \int_0^1 dx \int_a^b x^u \sin \ln x du$. (2)

Если доопределить нулями в точках a и b подынтегральную функцию внутреннего интеграла, то мы сделаем ее непрерывной (*почему?*) на множестве $K : \{ a \leq u \leq b; 0 \leq x \leq 1 \}$.

Теперь, (по теореме 1) изменив порядок интегрирования, получим, сделав подстановку $x = e^t$ и $dx = e^t dt$, $I = - \int_a^b du \int_{-\infty}^0 e^{(u+1)t} \sin t dt$.

Обозначим через J внутренний интеграл. Для него (*вспомните материал первого курса*) двукратным последовательным интегрированием "по частям" получается уравнение вида: $J = -1 - (u+1)^2 J$, откуда $J = -\frac{1}{1+(u+1)^2}$.

Возвращаясь к вычислению интеграла I , из (2) окончательно получаем

$$I = \int_a^b \frac{du}{1+(u+1)^2} = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1).$$

Условия, определяющие возможность перестановки в римановских интегралах операций дифференцирования и интегрирования, дает теорема 2:

Если в интеграле $\Phi(\alpha) = \int_{\lambda(\alpha)}^{\mu(\alpha)} f(x, \alpha) dx$ функции $f(x, \alpha)$, $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$ непрерывно дифференцируемы по α на $K : \{ a \leq x \leq b; c \leq \alpha \leq d \}$, то справедливо равенство

$$\Phi'(\alpha) = f(\mu(\alpha), \alpha) \mu'(\alpha) - f(\lambda(\alpha), \alpha) \lambda'(\alpha) + \int_{\lambda(\alpha)}^{\mu(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx. \quad (3)$$

Формула (3) нередко оказывается полезной при нахождении интегралов.

Пример 4. *Применив формулу дифференцирования по параметру α в интеграле*

$$I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \text{ где } b > 0, \text{ найти интеграл } J(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2}.$$

Поскольку в данном случае применима теорема 2, то мы имеем $I'_\alpha(\alpha) = 2\alpha J(\alpha)$. (4)

С другой стороны, по правилам интегрирования $I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha}$, а это дает

нам $I'_\alpha(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}} \cdot \frac{b}{\alpha^2}$. И, окончательно, из равенства (4) находим, что

$$\int_0^b \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)^2} = J(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} I'_\alpha(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} \cdot \frac{b}{\alpha^2 + b^2}.$$