СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ
по предмету

«ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МФТИ, 2 курс, весенний семестр

Умнов А.Е.

Материал для занятия 15 апреля 2020 года.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА
03 ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

При решении задач предполагается, что могут быть использованы, как известные из теоретической части курса "Гармонического анализа", следующие (табличные) интегралы:

1°. *Интеграл Дирихле* : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

2°. *Интегралы Лапласа* : $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \operatorname{sign} \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

3°. *Интеграл Эйлера_Пуассона*: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. $\alpha > 0$.

В ряде задач может оказаться полезной *формула Фруллани*:

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[0,+\infty)$ и для каждого $A > 0$ интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится, то $\forall a > 0$ и $\forall b > 0$ верно равенство $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

Рассмотрим для иллюстрации следующие задачи.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx$.

Решение. Выполним замену переменной $x^3 = u$ и используем значение интеграла Дирихле при $\alpha = 1$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx = \frac{1}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} .$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$, если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Решение. Заметим, что $0 < \int\limits_A^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} dx \le \frac{1}{A} \int\limits_A^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{A} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2A}$ при любом фиксированном $A > 0$. Поэтому можно применить формулу Фруллани. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\sqrt{\alpha}\, x\right)^2} - e^{-\left(\sqrt{\beta}\, x\right)^2}}{x} dx = e^{-0^2} \ln \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha} .$$

Пример 3. Вычислить $\Phi(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \cos x dx$, $\alpha > 0$.

Решение. Функция $\frac{1 - e^{-\alpha x}}{x}$ монотонно убывает на $x \in (0, +\infty)$, а функция $\cos x$ имеет ограниченную первообразную. Поэтому $\Phi(\alpha)$ сходится *поточечно* по признаку Дирихле.

Интеграл от $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} \cos x \right) = e^{-\alpha x} \cos x$ сходится *равномерно*, поэтому мы можем использовать равенство $\Phi'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x \, dx = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$. Откуда получаем $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \alpha^2\right) + C$. А, поскольку $\Phi(0) = 0$, то $C = 0$ и окончательно $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \alpha^2\right)$.

Пример 4. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$.

Решение. Рассмотрим параметрический интеграл $\Phi(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx$, $\alpha > 0$, который совпадает с исходным при $\alpha = 1$.

Заметим, что $\Phi(\alpha)$ сходится равномерно, поскольку его можно представить в виде $\int\limits_0^1 \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx$, где первый интеграл - собственный, а для второго - справедлива оценка $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx \le 2\alpha \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Далее, $\Phi'(\alpha)$ также сходится *равномерно*, поскольку справедлива оценка $\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\alpha x-\sin\alpha x}{x^3}=\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\le\frac{2}{x^2}$.

Наконец, $\Phi''(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$, так как $\alpha>0$. (Полное обоснование последнего равенства дайте самостоятельно).

Теперь. дважды проинтегрировав по α функцию $\Phi''(\alpha)$, получим, что $\Phi(\alpha)=\frac{\pi}{4}\alpha^2+\frac{C\pi}{2}\alpha+D$.

Поскольку $\lim\limits_{\alpha\to+0}\Phi(\alpha)=0$, то по непрерывности можно положить $\Phi(0)=0$. Тогда $\Phi(\alpha)=\frac{\pi}{4}\alpha^2$ и значение исходного интеграла есть $\Phi(1)=\frac{\pi}{4}$.

В примере 4 естественно может возникнуть вопрос: а не проще ли было параметризацию интеграла сделать по формуле $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x-\sin\alpha x}{x^3}dx$, $\alpha>0$? Какое Ваше мнение на этот счет?