СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ по предмету

«ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

МФТИ, 2 курс, весенний семестр

Умнов А.Е. *Материал для занятий 15мая 2020 года.*

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Определение и основные свойства

В большом числе случаев формулировку физического закона, описание явления или процесса удается выполнить, используя понятие *функции многих переменных* − правила, устанавливающего *однозначное соответствие* между двумя множествами, первое из которых есть конечный упорядоченный набор чисел ("векторов"), а второе − набор чисел.

Однако в процессе развития физики выяснилось, что этого инструмента может оказаться недостаточно.

Например, при помощи функций не удается построить корректное количественное описание $\rho_M(x,u)$ − *плотности материальной точки с радиусом-вектором* u *и конечной массы* M. С физической точки зрения, из равенства $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho_M(x,u)\,dx = M$ следует *неограниченное возрастание* $\rho_M(x,u)$ при неограниченном приближении x к u, что невозможно.[1]

Рассмотрим эту проблему с формальной, математической точки зрения. При этом предположим, что все используемые в записях интегралы имеют смысл, а u − произвольный фиксированный вещественный параметр.

Можно заметить, что решения задачи:

$$\text{найти функцию } f(x,u) \text{ такую, что } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(u), \qquad (1)$$

не существует. Попросту говоря, нет такой функции $f(x,u)$, которая бы умела делать то, что требует равенство (1). Но чем тогда может в принципе являться решение этой задачи?

Равенство (1) *каждой* допустимой функции $\varphi(x)$ ставит в соответствие *единственное* число $\varphi(u)$. Иначе говоря, решение (1) определяет некоторую зависимость, аргументом которой является не упорядоченный набор чисел, а обычная *функция*, в то время как, значение есть *число*.

Зависимости такого типа в математике известны. Например, на множестве геометрических векторов каждому из векторов можно поставить в однозначное соответствие его длину, на множестве квадратных матриц, каждой матрице можно поставить в соответствие ее детерминант, а каждой, непрерывной на некотором фиксированном промежутке, функции можно поставить в однозначное соответствие ее римановский (определенный) интеграл.

---

[1] Об этой "теоретической неприятности" физики знали со времен Ньютона-Лейбница, но особо не расстраивались, поскольку измерить практически можно было *только интеграл от* $\rho_M(x,u)$, а для материальной точки "функция" $\rho_M(x,u)$ физического смысла может и не иметь.

Зависимости подобного типа принято называть *функционалами*. Их можно определить, например, так:

> будем говорить, что на некотором множестве математических объектов X задан *функционал*, имеющий значения в числовом множестве Y, если задано правило, по которому *каждому* элементу из X поставлено в соответствие *единственное* число из Y.

Общепринятого единообразного обозначения для функционалов нет. Хотя достаточно часто используются функцеподобные формы записи, типа $Y(X)$. Вполне уместные, поскольку в случае, когда X есть числовое (или "векторное") множество, определения функционалов и функций совпадают.

При определении функционалов требования к свойствам множества X могут весьма широко варьироваться в зависимости от рассматриваемой задачи. Воспользуемся этой свободой при определении свойств области определения функционалов, которые могут являться решениями задач вида (1).

Эта область определения, традиционно обозначаемая как D, состоит из функций $\varphi(x)$. Сформулируем требования как индивидуально для функций $\varphi(x)$, так и для всей их совокупности,[2] предполагая, что элементы множества D являются функциями одной вещественной переменной.

1°. Пусть функции $\varphi(x) \in D$ определены на всей вещественной оси и имеют на **R** производную любого порядка;

2°. $\exists a \geq 0: \quad \forall x: |x| \geq |a| \quad \mapsto \quad \varphi(x) \equiv 0$.

Функции, удовлетворяющие условию 2°, принято называть *финитными*, а, одновременно 1° и 2°, − *основными*.

`Пример 1:` основной является функция-"шапочка", задаваемая формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{4}{4-x^2}}, \text{при} |x| < 2, \\ 0, \qquad \text{при} |x| \geq 2, \end{cases}$$ график которой показан на рис.1.

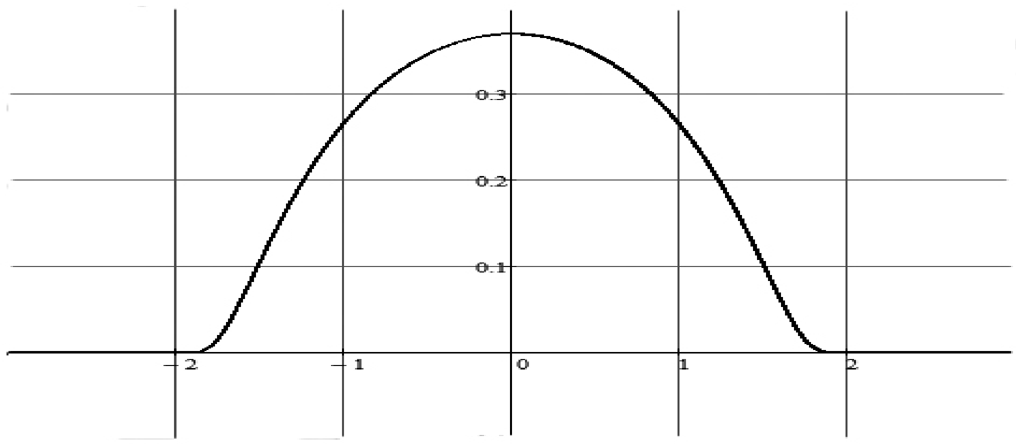


Рис. 1. Пример основной функции.

[2] Не будем здесь скрывать наших, далеко идущих планов: набор требований, формулируемых ниже, позволит в перспективе строить методы решения задач существенно более серьезных, чем задача (1). Речь идет о задачах Коши, краевых и смешанных задачах для уравнений в частных производных второго порядка, называемых обычно *уравнениями математической физики*.

Нетрудно установить, что множество D является *линейным пространством* со стандартно введенными операциями сложения и умножения числа на элемент.

Определим теперь *сходимость* последовательности $\{\varphi_{(k)}(x)\}$ элементов в D. Символ $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{(k)}(x)=\varphi^*(x)$ будет означать, что на множестве $\mathbf{R}$ имеет место *равномерная* по x сходимость самой последовательности, так и для последовательностей из производных *любого* порядка $\varphi_{(k)}^{(n)}(x)\Rightarrow\varphi^{*(n)}$ $\forall n=0,1,2,\ldots$. Следует отметить, что данное определение сходимости не может быть сведено к использованию какой-либо метрики (см., например, Петрович А.Ю., Ч.3 Стр. 292-293).

Пример 2: последовательность основных функций вида $\varphi_{(k)}(x)=\dfrac{\varphi^*(x)}{n}$, где $\varphi^*(x)$ − функция-"шапочка", сходится в к функции тождественно равной нулю на множестве всех вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Перейдем теперь к определению функционалов в пространстве D − основных функций. Итак, мы называем *функционалом в пространстве* D правило, по которому *каждой* основной функции $\varphi(x)$ ставится в соответствие *единственное* число $\mathcal{F}(\varphi(x))\in\mathbf{R}$.

Заметим также, что функционалы, определенные на D, можно складывать и умножать на число. В результате будут получаться новые функционалы.

Используя свойства пространства основных функций D, среди всевозможных видов функционалов можно выделить специальный класс, элементы которого мы назовем *линейными* и *непрерывными* функционалами. Приведем определения.

Определение 1.: Функционал $\mathcal{F}(\varphi)$ называется *линейным* в D, если $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$ и $\forall\varphi_1,\varphi_2\in D$ выполняется равенство

$$\mathcal{F}(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2)=\lambda_1\mathcal{F}(\varphi_1)+\lambda_2\mathcal{F}(\varphi_2).$$

Определение 2.: Функционал $\mathcal{F}(\varphi)$ называется *непрерывным* в D, если $\forall\{\varphi_{(k)}\}$ сходящейся к $\varphi^*(x)$ в D, имеет место $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{F}(\varphi_{(k)}(x))=\mathcal{F}(\varphi^*(x))$.

Теперь будем рассматривать *только* линейные и непрерывные функционалы в D, которые будем называть, следуя сложившейся традиции. *обобщенными функциями*. Нетрудно заметить, что *в полной своей совокупности* с операциями сложения функционалов и умножения числа на функционал, обобщенные функции образуют линейное пространство. Его принято обозначать D'.

То, что функционалы принято называть функциями, нам придется проглотить. Не очень хорошо, конечно. А вот, прилагательное *обобщенные* наводит на вполне законный вопрос, а что, собственно говоря, рассматриваемые нами функционалы обобщают? Возвращаясь к задачам вида (1), получаем следующее объяснение..

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируемая на любом промежутке вещественной оси. Тогда (это теорема!) интеграл вида

$$\mathcal{G}(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (2)$$

есть линейный и непрерывный функционал на D. То есть, функционал $\mathcal{G}(\varphi)\in D'$.

Значит, часть функционалов из D' может быть определена по формуле (2) при помощи обычных, абсолютно интегрируемых функций $f(x)$. Такие обобщенные функции будем называть *регулярными*. Все прочие − *сингулярными*. Это и дает повод использовать термин *обобщенные* для обозначения множества D' − совокупности регулярных и сингулярных функционалов.

Итак, регулярные обобщенные функции определяются при помощи (2). Способы описания сингулярных обобщенных функций могут быть самыми разнообразными, хоть стихами. Рассмотрим

Пример 3: Пусть функционал $F(\varphi)$ ставит в соответствие основной функции $\varphi(x)$ ее значение в точке $a \in \mathbf{R}$. Показать, что эта $F(\varphi) \in D'$.

То, что $F(\varphi) = \varphi(a) \in \mathbf{R}$ есть функционал на D, − очевидно. Покажем, что он линейный и непрерывный.

Имеем $F(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\varphi_1(a) + \lambda_2\varphi_2(a) = \lambda_1 F(\varphi_1) + \lambda_2 F(\varphi_2)$. Это доказывает линейность.

Если имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{(k)}(x) = \varphi^*(x)$, то по определению сходимости в D $\varphi_{(k)}^{(n)}(x) \rightrightarrows \varphi^{*(n)}$ $\forall n = 0,1,2,\ldots$ Но это значит, что $\varphi_{(k)}(a) \to \varphi^*(a)$. Откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} F(\varphi_{(k)}) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{(k)}(a) = \varphi^*(a) = F(\varphi^*)$. Таким образом доказана и непрерывность.

Рассмотренная в примере 3 обобщенная функция имеет специальное значение и наименование. Это − *дельта-функция Дирака*. Ее стандартное обозначение $\delta_a(x)$.

Важным способом связи между регулярными и сингулярными обобщенными функциями является *предельный переход*. Иначе говоря, сингулярная обобщенная функция может быть представлена как предел последовательности функционалов в D'.

Пример 4: Покажем, что в D' для дельта-функции Дирака $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \pi\,\delta_0(x)$.

Решение: При любом положительном ε функция $f_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ будет определять $F_\varepsilon(\varphi)$ − регулярную особую функцию в D'. Предположим, что в силу финитности, $\exists\ 0 \le A < +\infty$ такое, что все $\varphi(x)$ основные функции равны нулю вне отрезка $[-A, A]$. Тогда будут справедливы равенства

$$F_\varepsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-A}^{+A} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-A}^{+A} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(0) + \varphi(x) - \varphi(0)\big)\,dx = \varepsilon\varphi(0)\int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x^2+\varepsilon^2} + \varepsilon\int_{-A}^{+A} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\,.$$

Для первого слагаемого имеем:

$$\varepsilon\varphi(0)\int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x^2+\varepsilon^2} = 2\varepsilon\varphi(0)\int_{0}^{+A} \frac{dx}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon\varphi(0)}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon} = 2\varphi(0)\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon} \to \pi\varphi(0)\,.$$

Для второго слагаемого в силу оценки, следующей из теоремы Лагранжа:

$$\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right| \le \left|x\varphi'(\xi)\right| \le |x| \max_{x\in[-A,+A]} \left|\varphi'(x)\right| = C|x|$$

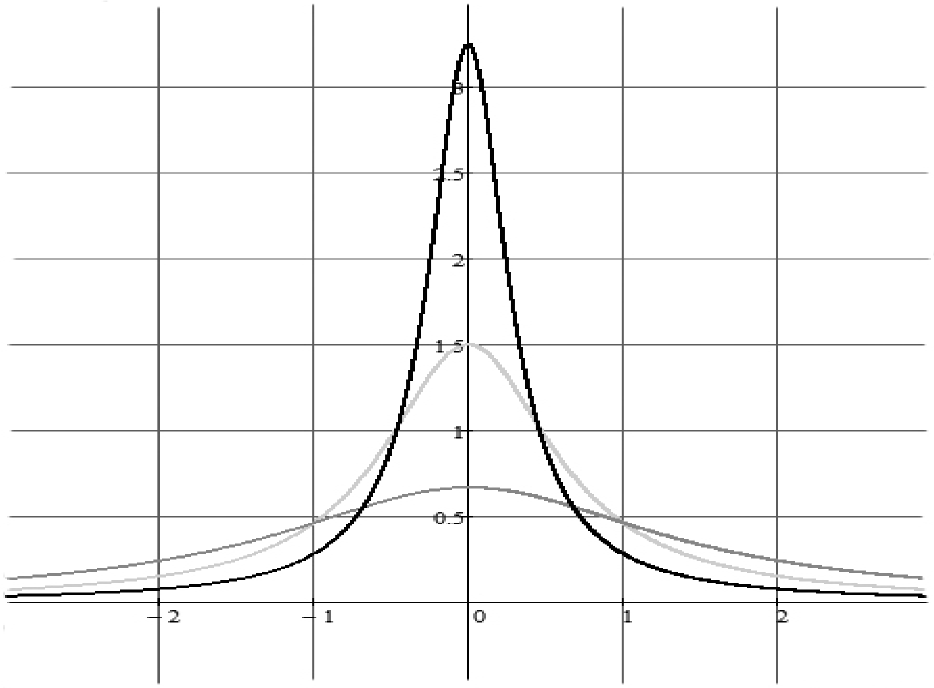
получим

$$\left| \varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\, dx \right| \le \varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{|\varphi(x)-\varphi(0)|}{x^2+\varepsilon^2}\, dx \le C\varepsilon \int_{-A}^{+A} \frac{|x|\, dx}{x^2+\varepsilon^2} =$$

$$= C\varepsilon \int_{0}^{+A} \frac{2x\, dx}{x^2+\varepsilon^2} = C\varepsilon \ln\left(x^2+\varepsilon^2\right)\Big|_0^A = C\varepsilon \ln\left(A^2+\varepsilon^2\right) - 2C\varepsilon \ln\varepsilon \underset{\varepsilon\to+0}{\to} 0 .$$

Откуда получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \pi\,\delta_0(x)$.

На рис.2 показаны графики $f_\varepsilon(x)$ для различных значений ε.



Теперь обсудим, как принято записывать обобщенные функции. Заметим, что правая часть формулы (2) в регулярном случае совпадает с записью скалярного произведения, то есть $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx = (f,\varphi)$. Можно сказать, что левая скобка и идентификатор функционала "рокировались".

Данное равенство, если распространить его и на сингулярные случаи, позволяет символически обозначать *любые* обобщенные функции символом (f,φ), где f − идентификатор функционала, а φ обозначает его аргумент − основную функцию. Заметим, что обратное переобозначение не всегда математически корректно. Например, из символически верного $(\delta_a(x),\varphi) = \varphi(a)$ не следует $(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(a)$, поскольку $\delta_a(x)$ не функция и не имеет конкретного значения в точке x.

Тем не менее, подобные "формулы" можно иногда встретить в информационных ресурсах, где они используются для простоты при объяснениях "на пальцах".

Мы же теперь рассмотрим случаи, в которых использование записи вида (f,φ) не только корректно, но и достаточно наглядно. Суть приема такова: мы получаем символическую форму записи с функционалом некоторого "нового типа" для *регулярного* случая (когда использование интеграла допустимо), а потом (предварительно убедившись в линейности и непрерывности "новичка") используем эту форму записи и для *сингулярного* случая, объявляя ее верной по определению.

Используем эту схему для определения в D' операции "умножения на функцию". Пусть $g(x)$ − бесконечно дифференцируемая обычная функция. Что мы можем принять за $g(x)f(x)$, если $f(x) \in D'$?

В регулярном случае мы имеем $(g(x)f,\, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\varphi(x)\,dx = (f,\, g(x)\varphi)$. По этому за функционал $g(x)f$ можно принять $(g(x)f,\, \varphi) = (f,\, g(x)\varphi)$. Линейность и непрерывность нового функционала в этом определении проверьте самостоятельно.

Наконец, по этой же технологии можно определить и производную для обобщенной функции. Данное определение (если в регулярном случае использовать интегрирование "по частям") имеет вид $f',\, \varphi) = -(f,\, \varphi')$.

Примеры дифференцирования обобщенных функций рекомендуется рассмотреть в материале *Умнова Е.А. "Дифференцирование обобщенных функций"*, выложенного на той же странице, что и данный текст.