# *Пояснения к введению в ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ*

*Умнов А.Е, Умнов Е.А.*
(*Верс. 25 июля 2018г*)

*Данный документ имеет своей целью проиллюстрировать некоторые способы применения понятий и методов, рассмотренных ранее в курсах математического анализа и линейной алгебры, для построения координатной схемы описания элементов в линейных пространствах не имеющих базиса.*

Основным свойством $n$-мерного линейного пространства является существование в нем *базиса*, то есть:

> упорядоченного конечного набора $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ линейно независимых элементов такого, что добавление в него любого элемента пространства делает этот набор линейно зависимым.

В этом случае каждый элемент линейного пространства $x$ может быть представлен единственным образом как линейная комбинация базисных элементов

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j g_j \,, \tag{1}$$

где упорядоченный набор чисел $\xi_j$ (называемых *координатами* элемента $x$ в базисе $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$) дает полное описание этого элемента. Максимально возможное число линейно независимых элементов в линейном пространстве с базисом принято называть *размерностью* пространства.

Известно, что базис существует не в любом линейном пространстве, где имеются линейно независимые элементы. Например, в $\Lambda_{C[-1,1]}$ − линейном пространстве функций $x(\tau)$, непрерывных на отрезке $\tau \in [\,-1,1\,]$ − набор элементов вида $\{ 1, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^k \}$ линейно независим при любом целом неотрицательном $k$. Но для этого набора всегда существует элемент $\tau^{k+1}$, добавление которого не нарушает линейной независимости исходного набора (покажите это самостоятельно). Следовательно, базиса в таком линейном пространстве нет, и в нем невозможно стандартное координатное представление элементов.

С другой стороны, удобства координатного представления элементов линейного пространства вполне очевидны. Поэтому представляется целесообразной попытка обобщения понятия координат таким образом, чтобы их использование оказалось бы возможным и в линейных пространствах с неограниченным числом линейно независимых элементов.

Рассмотрим один из возможных подходов к решению этой проблемы.

Пусть имеется линейное $n$-мерное пространство, в котором определено скалярное произведение элементов $(x, y)$, то есть, *евклидово* пространство $E^n$. Если $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$ − базис в $E^n$, то для каждого элемента $x$ в силу (1) будет верным

$$\sum_{j=1}^{n} (g_j, g_k)\, \xi_k = (x, g_k) \qquad \forall k = [1, n]\,. \tag{2}$$

Здесь (2) является системой линейных уравнений, совместной и однозначно разрешимой относительно координат, поскольку ее основная матрица есть матрица Грама − не вырожденная для линейно независимого набора элементов $\{ g_1, g_2, \ldots, g_n \}$.

Заметим, что в случае *ортонормированного* базиса $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$ (который всегда существует в $E^n$) система (2) распадается на $n$ независимых равенств вида

$$\xi_k = (x, e_k) \quad \forall k = [1, n]\,, \tag{3}$$

поскольку $(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ если } j = k, \\ 0, \text{ если } j \neq k. \end{cases}$

С другой стороны, согласно аксиоматике евклидова пространства, скалярное произведение существует независимо от того, является ли данное пространство конечномерным или нет. Поэтому формулы (3) *условно* можно принять за определение координат элемента $x \in E$ − в евклидовом пространстве с неограниченным числом линейно независимых элементов.

Условия, выполнение которых необходимо, для того, чтобы члены последовательности $\{\xi_k\}$, где

$$\xi_k = (x, e_k) \quad \forall k = [1, +\infty)\,, \tag{4}$$

можно было бы рассматривать, как аналоги координат элемента $x \in E$, таковы:

- все элементы в наборе линейно независимых $\{ e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots \}$ должны быть нормированы и попарно ортогональны, то есть, $(e_j, e_k) = \delta_{jk}\ \forall j, k \in N$;
- ряд $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \xi_j e_j$ должен быть сходящимся в некотором $\Omega \subseteq E$;
- сумма этого ряда должна совпадать (или быть близкой в некотором смысле) к $x$.

Здесь напомним (в связи с использованием понятия сходимости ряда), что в качестве *нормы* элемента $x \in E$ можно принять число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, а в качестве *метрики* − (меры близости (или расстояния) для элементов $x$ и $y$) − число $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Это позволяет использовать понятия *фундаментальности* и *сходимости* для последовательности элементов в $E$ и, конкретно, для последовательностей частичных сумм ряда $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \xi_j e_j$.

В качестве примера рассмотрим в $E_{C[-1,1]}$ − евклидовом пространстве функций $x(\tau)$, непрерывных на промежутке $[-1,1]$ и со скалярным произведением $(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(\tau) y(\tau)\, d\tau$ − последовательность линейно независимых элементов $\{ g_k(\tau) = \tau^k \ k = 0,1,2,3,\ldots \}$.

Элементы этой последовательности не являются попарно ортогональными. Например,

$$(g_1, g_3) = \int\limits_{-1}^{1} g_1(\tau) g_3(\tau)\, d\tau = \int\limits_{-1}^{1} \tau^4 d\tau = \frac{2}{5} \neq 0\,.$$

Однако данный набор можно сделать ортогональным при помощи процедуры ортогонализации Грама−Шмидта (применимой к наборам с неограниченным числом элементов), а после нормировки, и ортонормированным. В результате (это будет показано в курсе гармонического анализа) возникнет последовательность степенных многочленов вида:

$$e_0(\tau) = 1\,, \quad e_1(\tau) = \tau\,, \quad e_2(\tau) = \frac{1}{8}\left(\tau^2 - \frac{1}{3}\right), \quad \ldots \quad e_k(\tau) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d\tau^k}\left(\tau^2 - 1\right)^k, \quad \ldots \quad ,$$

называемых *полиномами Лежандра*.

И этот новый набор многочленов можно использовать для представления на отрезке $[-1,1]$ любой непрерывной функции $x(\tau)$ при помощи ряда

$$x(\tau)=\sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k e_k(\tau)\,,\quad \text{где}\quad \xi_k=\int_{-1}^{1}x(\tau)g_k(\tau)\,d\tau\,. \tag{5}$$

Ряды вида (5) принято называть *рядами Фурье* и их частичные суммы являются аппроксимациями функции $x(\tau)$ *на всем промежутке* $[-1,1]$ в то время как степенные ряды (типа ряда Тейлора) дают лишь *локальную* аппроксимацию для некоторой точки $\tau_0$.

Вопросы об условиях сходимости и других свойствах рядов Фурье мы рассматривать не будем, они подробно исследуются в курсе гармонического анализа. Здесь же мы обратим внимание на то, что ортогональные системы элементов в бесконечномерных евклидовых пространствах можно также строить по схемам, принципиально отличающимся от метода Грама−Шмидта.

Разберем одну из таких схем, основанную на использовании свойств *самосопряженных линейных преобразований* (операторов), действующих в $E$.

Приведем предварительно некоторые необходимые определения и свойства, используя равенство $y=\hat{A}x$ для обозначения факта: элемент $y$ есть результат действия преобразования $\hat{A}$ на элемент $x$. Элемент $y$ принято в этом случае называть *образом* элемента $x$, а элемент $x$ − *прообразом* элемента $y$.

1°. Линейное преобразование $\hat{A}^*$ называется *сопряженным* линейному преобразованию $\hat{A}$, если $\forall x,y\in E$: $(\hat{A}x,y)=(x,\hat{A}^*y)$. То есть, действие оператора $\hat{A}$ на первый сомножитель в скалярном произведении совпадает с действием $\hat{A}^*$ на второй сомножитель.

2°. Линейное преобразование $\hat{R}$ называется *самосопряженным* линейным преобразованием, если $\forall x,y\in E$: $(\hat{R}x,y)=(x,\hat{R}y)$.

3°. Ненулевой элемент $f$ называется *собственным вектором* линейного преобразования $\hat{A}$, который отвечает *собственному значению* $\lambda$, если $\hat{A}f=\lambda f$.

4°. Собственные векторы самосопряженного преобразования, отвечающие *различным* собственным значениям, *попарно ортогональны*. При этом, из собственных векторов любого самосопряженного преобразования в $E^n$ можно образовать *ортонормированный базис*.

5°. Для любого линейного преобразования $\hat{A}$ линейные преобразования $\hat{A}\hat{A}^*$ и $\hat{A}^*\hat{A}$ − *самосопряженные* и имеют *неотрицательные* собственные значения.

Напомним вкратце доказательства утверждений, приведенных в пп. 4° и 5°, известных из курса линейной алгебры.

*Пункт* 4°. Пусть $f_1$ и $f_2$ − собственные векторы $\hat{R}$, тогда из $\begin{cases}\hat{R}f_1=\lambda_1 f_1\,,\\ \hat{R}f_2=\lambda_2 f_2\end{cases}$ следует

$$\begin{cases}(\hat{R}f_1,f_2)=\lambda_1(f_1,f_2)\,,\\ (f_1,\hat{R}f_2)=\lambda_2(f_1,f_2).\end{cases}$$

В силу самосопряженности $\hat{R}$ (то есть равенства левых частей) будем иметь $\lambda_1(f_1, f_2) = \lambda_2(f_1, f_2)$ и, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то, окончательно $(f_1, f_2) = 0$.

*Пункт 5⁰.* Справедливы равенства $\forall x, y \in E:\ (\hat{A}^*\hat{A}x, y) = (\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, \hat{A}^*\hat{A}y)$. Но это и означает самосопряженность $\hat{A}^*\hat{A}$. Наконец, из $\hat{A}^*\hat{A}f = \lambda f$ имеем, что $(\hat{A}^*\hat{A}f, f) = \lambda(f, f)$. Откуда $(\hat{A}f, \hat{A}f) = \lambda(f, f)$, что, в силу аксиоматики евклидова пространства, дает $\lambda \geq 0$.

Рассмотрим теперь множество всевозможных функций $x(\tau)$, имеющих производную *любого* порядка на отрезке $[-1,1]$, и таких, что $\forall x(\tau) \quad x(-1) = x(1)$. Нетрудно проверить, что это множество есть линейное пространство.

Превратим его в евклидово пространство, введя в нем скалярное произведение элементов $x$ и $y$ по формуле

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} x(\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

Оператор дифференцирования $\hat{D} = \dfrac{d}{d\tau}$ будет линейным преобразованием, действующим в этом пространстве.

Найдем для него сопряженное преобразование. Интегрирование по частям дает равенства

$$(\hat{D}x, y) = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{d\tau}(\tau)y(\tau)\,d\tau = x(\tau)y(\tau)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x(\tau)\frac{dy}{d\tau}(\tau)\,d\tau = \int_{-1}^{1} x(\tau)\Big(-\frac{dy}{d\tau}(\tau)\Big)\,d\tau = (x, \hat{D}^*y).$$

Откуда $\hat{D}^* = -\dfrac{d}{d\tau}$.

Тогда оператор $\hat{D}^*\hat{D} = -\dfrac{d}{d\tau}\Big(\dfrac{d}{d\tau}\Big) = -\dfrac{d^2}{d\tau^2}$ будет самосопряженным и с неотрицательными собственными значениями. Найдем для него собственные векторы.

Условие $\hat{D}^*\hat{D}f = \lambda f$ в данном случае (если положить $\lambda = \omega^2 \geq 0$) является дифференциальным уравнением вида

$$-\frac{d^2 f}{d\tau^2} = \omega^2 f,$$

общее вещественное решение которого описывается формулой $f(\tau) = A\cos\omega\tau + B\sin\omega\tau$, причем $A^2 + B^2 \neq 0$, поскольку собственный вектор ненулевой по своему определению.

Кроме того, из условия $f(-1) = f(1)$ получаем, что $\sin\omega = 0$, то есть $\omega = \pi k$, где $k$ − любое целое число. Таким образом, система *линейно независимых* попарно ортогональных функций, являющихся собственными векторами самосопряженного оператора $\hat{D}^*\hat{D}$, имеет вид

$$f_k(\tau) = A\cos\pi k\tau + B\sin\pi k\tau, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Эта система, называемая обычно *тригонометрической*, также как и система полиномов Лежандра, может использоваться для аппроксимации непрерывных на $[-1,1]$ функций $x(\tau)$, удовлетворяющих условию $x(-1) = x(1)$.

Такая аппроксимация будет иметь вид ряда

$$x(\tau) \approx \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \pi k\tau + B_k \sin \pi k\tau \ ,$$

где коэффициенты $A_k$ и $B_k$ определяются, аналогичными (5), формулами

$$A_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(\tau)\, d\tau, \quad A_k = \int_{-1}^{1} x(\tau) \cos \pi k\tau \, d\tau \quad \text{и} \quad B_k = \int_{-1}^{1} x(\tau) \sin \pi k\tau \, d\tau \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$