Нахождение пределов функций. Раскрытие неопределенностей

Как и для задачи нахождения предела числовой последовательности, при поиске пределов функций сочетание использования свойств пределов и набора "замечательных пределов" позволяет в ряде случаев выполнять "раскрытие неопределенностей", основные из которых:

$$\text{“}0 \cdot \infty\text{”} \ , \quad \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \ , \quad \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \ , \quad \text{“}\infty - \infty\text{”} \ , \quad \text{“}1^{\infty}\text{”} \ .$$

Продемонстрируем соответствующие приемы на следующих примерах.

Пример 4.3.1. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$.

В этой задаче необходимо раскрыть неопределенность вида "$\frac{0}{0}$".

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x^2+2x+4} = \frac{1}{12} \, .$$

Пример 4.3.2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2}{(2x+1)^2}$.

Здесь имеет место неопределенность вида "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{(2x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{4x^2+4x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\dfrac{2}{x^2}}{4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{3}{4}\,.$$

Пример 4.3.3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

Тип неопределенности в этом примере – "$\infty-\infty$".

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}-x}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{(\sqrt{x^2+3x}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{(\sqrt{x^2+3x}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{(\sqrt{x^2+3x}+x)} =$$

теперь мы имеем дело с неопределенностью вида "$\dfrac{\infty}{\infty}$" – разделим числитель и знаменатель на x :

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+1} = \frac{3}{2}\,.$$

В ряде случаев для использования значений "замечательных" пределов оказывается целесообразным выполнить замену переменной величины.

Пример 4.3.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Для раскрытия неопределенности вида "$\dfrac{0}{0}$" в этой задаче удобно ввести новую переменную $t = 5x$, которая будет очевидно стремиться к нулю, когда x стремится к нулю. Поэтому, в силу первого "замечательного" предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\left(\dfrac{t}{5}\right)} = \lim_{t\to 0} 5\cdot\frac{\sin t}{t} = 5\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 5\cdot 1 = 5\ .$$

Пример 4.3.5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

Данная задача приводит к необходимости раскрытия неопределенности типа "1^{∞}". Выполним замену переменной, положив $t = -\dfrac{x}{3} \Rightarrow x = -3t$. Подставляя, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-3t} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-3} =$$

$$= \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-3} = e^{-3} = \frac{1}{e^{3}}.$$