Непрерывность функции в точке и на множестве. Классификация точек разрыва

Определение 4.4.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке области определения* $x = a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Если это условие не выполнено, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *разрыв в точке* $x = a$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то для любой числовой последовательности $x_n \longrightarrow a$ верно равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) = f(a).$$

а, значит, если $f(x)$ непрерывна и в точке $x = g(a)$, где $g(x)$ другая непрерывная в точке $x = a$ функция, то

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(g(a)), \tag{4.4.1}$$

Определение 4.4.2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на некотором числовом множестве*, если она непрерывна в *каждой* точке этого множества. Функция $f(x)$ называется *разрывной на некотором числовом множестве*, если она не не является непрерывной *хотя бы в одной* из точек этого множества.

Пример 4.4.1. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $X\ :\ (-\infty, +\infty)$, а функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна как на $X\ :\ (-\infty, 0)$, так и на $X\ :\ (0, +\infty)$, но разрывна на $X\ :\ ((-\infty, +\infty))$.

Определение 4.4.3. Говорят, что функция $f(x)$ имеет *устранимый разрыв* в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, когда точка $x = a$ принадлежит области определения функции $f(x)$, то точка $x = a$ называется *неустранимой точкой разрыва* функции $f(x)$.

Пример 4.4.2. Исследовать на непрерывность и выполнить классификацию ее точек разрыва функций:

1) $y = \operatorname{sgn} x$.

У данной функции точка разрыва $x = 0$ неустранимая, так как предел в этой точке не существует (см. рис. 3.5).

2) $y = |\operatorname{sgn} x|$.

Для этой функции точка разрыва $x = 0$ устранимая, так как предел в этой точке существует, $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$, но не равен значению функции: $|\operatorname{sgn} 0| = 0 \neq 1$.

3)

$$y = \left[\begin{array}{cl} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ a \quad , & \text{если } x = 0. \end{array}\right.$$

Данная функция непрерывна $\forall x$, если $a = 1$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и имеет в $x = 0$ устранимую точку разрыва $\forall a \neq 1$.

4)

$$y = \frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$$

Эта функция имеет в $x = 1$ устранимую точку разрыва, а в $x = 2$ – неустранимую.

Действительно, если преобразовать запись данной функции к виду $y = \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x-2}$, то для $x = 1$, в силу "первого замечательного предела", существует предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = 1 \cdot \frac{1}{-1} = -1,$$

в то время как в точке $x = 2$, хотя $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = \sin 1$, но $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$ – не существует, и мы имеем разрыв неустранимого типа.

Использование свойства непрерывности во многих случаях позволяет упростить процедуру раскрытия неопределенностей при нахождении пределов функций.

Пример 4.4.3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Данная задача приводит к неопределенности типа “$\dfrac{0}{0}$”. Для ее раскрытия выполним, приняв во внимание непрерывность логарифмической функции и «второй замечательный предел», следующие преобразования

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\ln(1+x)^{\dfrac{1}{x}} \right) = \ln \left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\dfrac{1}{x}} \right) = \ln e = 1\ .$$

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой внутренней точке отрезка $[a,b]$ и значения на концах отрезка, совпадающие с односторонними пределами, то

1) $f(x)$ ограничена на $[a,b]$.

2) Существуют $x_1 \in [a,b]$ и $x_2 \in [a,b]$ такие, что

$$f(x_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

3) Пусть $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда $\forall C \in [A,B] \exists c \in [a,b]$ такое, что $f() =$

4) Если функция $f(x)$ строго монотонна на $[a,b]$, то она имеет обратную функцию, и притом также строго монотонную.

Заметим, что эти свойства могут не выполняться для функций непрерывных на интервале. Например, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале (a,b), но она неограничена на этом интервале.

Функция, определенная на отрезке и имеющая соответствующее множество значений в виде отрезка, может не быть непрерывной. Такова, например,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \in [-1,0], \\ x+1 & \text{при} \quad x \in \quad (0,1]. \end{cases}$$