Производные функций, заданных специальным образом

Производная от обратной функции

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть эта функция имеет *ненулевую* производную в точке x_0, тогда *обратная к* $y = f(x)$ *функция* $x = f^{-1}(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную, значение которой

$$\left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=y_0} = \frac{1}{\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}}$$

`Пример.` Рассмотрим две взимно обратные функции $y = \sin x$ и $x = \arcsin y$ в малой (гарантирующую строгую монотонность) окрестности точки $\left\{ x_0 = \frac{\pi}{4},\ y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

В этой точке мы имеем

$$
\begin{array}{llll}
y(x) = \sin x & y'_x = \cos x & x_0 = \dfrac{\pi}{4} & y'_x(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\
x(y) = \arcsin y & x'_y = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} & x'_y(y_0) = \sqrt{2}\,.
\end{array}
$$

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ и параметрически (локально!) задают в ней функцию $y = f(x)$.

Если, кроме того, $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные в точке t_0 и $x'_t(t_0) \neq 0$, то тогда $y'_x(x_0) = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$.

`Пример`. Пусть $\begin{cases} x = R\cos t\,, \\ y = R\sin t\,. \end{cases}$

В этом случае $x_0 = R\cos t_0 \quad \forall t_0 \neq k\pi,$ где $k \in (Z)$ и

$$y'_x(x_0) = -\frac{R\cos t_0}{R\sin t_0} = -\operatorname{ctg} t_0\,.$$

Производная функции, заданной неявно

Пусть дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y(x)) = 0$. Тогда $y'_x(x)$ находится из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'_x(x) = 0\,.$$

`Пример.` Пусть $y = f(x)$ определена неявно уравнением

$$\sqrt{x} + \sqrt{y(x)} = 3 \quad x \in (0,9)\,.$$

Найти $y'_x(2)$.

Имеем $y(2) = 1$. Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,,$$

то

$$y'_x(3) = -\sqrt{\frac{y}{x}}\,\Bigg|_{\substack{x\,=\,2 \\ y\,=\,1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Производные высших порядков

Предположим, что у функции $y = f(x)$ имеется производная функция, которая также является диффнеренцируемой. Тогда производная функция от производной называется *производной второго порядка* для функции $y = f(x)$ и обозначается как

$$y''_{x=x_0}\ ; \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}\ ; \quad y''(x)|_{x=x_0}\ ,$$

а поиск значения этой числовой характеристики сводится к вычислению предела вида

$$f''(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f'(x_0+t) - f'(x_0)}{t}\ . \tag{6.1}$$

Поскольку вторые производные функции в точке (как пределы функции) определены однозначно, то можно задать новую функцию, значениями которой являются числа, получаемые по формуле (6.1). Эту функцию (производную от производной) называют *второй производной функцией от функции* $y = f(x)$. Для ее нахождения следует использовать те же правила, что и для первой производной функции.

Например, если $y = \ln|x|$, то, согласно таблице 5.1, $y' = \dfrac{1}{x}$, а, в свою очередь, производная функция от $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ по той же таблице 5.1 равна $(-1)x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$. То есть, $(\ln|x|)'' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Рассуждая аналогично, можно дать определение производной порядка n. Эту производную будем обозначать

$$y^n_{x=x_0}\ ; \quad \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=x_0}\ ; \quad y^n(x)|_{x=x_0}\ .$$

При вычислении производных высших порядков часто оказываются полезными следующие формулы:

$$1)\quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad \text{в частности } \ (e^x)^{(n)} = e^x\,,$$

$$2)\quad (\sin\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$3)\quad (\cos\alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right),$$

$$4)\quad \Big((ax+b)^p\Big)^{(n)} = a^n p(p-1)\ldots(p-n+1)(ax+b)^{p-n}$$

$$\text{в частности } \ \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}} \qquad ,$$

$$5)\quad (\log_a|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$$

$$\text{в частности } \ (\ln|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

Наконец, приведем формулу, носящей название *формулы Лейбница*, для n-ой производной от произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, каждая из которых имеет производные до порядка n включительно.

$$6)\quad (u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

Рассмотрим примеры использования этих формул

`Задача 6.1.` Найти $f^{(n)}(x)$ для $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-2x-3}$.

`Решение.` Имеем $f(x) = \dfrac{x+5}{(x+1)(x-3)}$. Разложим эту функцию на простейшие дроби $f(x) = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x-3)}$. Тогда

$$A(x-3) + B(x+1) = x+5 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A+B=1, \\ -3A+B=5. \end{cases}$$

Откуда $A=-1$ и $B=2$. Для функции

$$f(x) = -\frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{(x-3)},$$

используя линейность операции дифференцирования и частный случай формулы 4) , получаем

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{2}{(x-3)^{(n+1)}} - \frac{1}{(x+1)^{(n+1)}} \right).$$

`Задача 6.2.` Найти $f^{(n)}(x)$ для $f(x) = (x+1)^2 \sin 3x$.

`Решение.` Применим формулу 6) (т.е. формулу Лейбница). В данной задаче положим $u(x) = \sin 3x$ и $v(x) = (x+1)^2$. Тогда

$$f^{(n)}(x) = C_n^{(0)} u^{(n)}(x) v^{(0)}(x) + \\ + C_n^{(1)} u^{(n-1)}(x) v^{(1)}(x) + C_n^{(2)} u^{(n-2)}(x) v^{(2)}(x) ,$$

поскольку $v^{(k)}(x) = 0$ для $k \geq 3$.

По формуле 2) имеем

$$\begin{aligned} (\sin 3x)^{(n)} &= 3^n \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) , \\ (\sin 3x)^{(n-1)} &= 3^{n-1} \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right) , \\ (\sin 3x)^{(n-2)} &= 3^{n-2} \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2} - \pi\right) , \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{array}{lll} v^{(0)}(x) = (x+1)^2 , & v^{(1)}(x) = 2(x+1) , & v^{(2)}(x) = 2 , \\ C_n^0 = 1 , & C_n^1 = n , & C_n^0 = \dfrac{n(n-1)}{2} , \end{array}$$

что при использовании тригонометрических формул приведения окончательно дает

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= 3^n (x+1)^2 \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) - \\ &- 3^{n-1} 2n(x+1) \cos\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) - \\ &- 3^{n-2} n(n-1) \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) , \end{aligned}$$

Дифференциалы

При решении прикладных задач часто удается получить нужную информацию о локальных свойствах функции $y = f(x)$, используя лишь ее линейную аппроксимацию.

Другими словами, если удается исследуемую функцию представить в виде

$$y(x) = y(x_0) + A(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\,,$$

то величину изменения значения $f(x)$ при малом отклонении x от x_0 можно оценить как

$$y(x) - y(x_0) \approx A(x_0)(x - x_0)\,.$$

В этом случае $A(x_0)(x - x_0)$ принято называть *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначать как dy и говорить, что функция $y = f(x)$ *дифференцируемая* в точке x_0.

Если принять по определению, что дифференциал независимой переменной x равен ее приращению, т.е. $dx = x - x_0$, то $dy = A(x_0)dx$. Иначе говоря, дифференциал dy можно рассматривать как функцию *двух независимых* переменных x_0 и dx, причем от dx эта функция зависит *прямо пропорционально.*

Можно показать (это — теорема), что $A(x_0) = f'(x_0)$ и будет верно равенство $dy = f'(x_0)dx$. Более того, для дифференцируемости функция $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная $f'(x_0)$.

Для двух дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ и произвольных константах λ и μ справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
d(\lambda f + \mu g) &= \lambda df + \mu dg\,, \\
d(fg) &= gdf + fdg\,, \\
d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad g \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

Пусть производная $f'(x)$ дифференцируема на некотором интервале вещественной оси. Тогда, рассматривая $dy = f'(x)dx$ как функцию от x при фиксированном dx и используя в качестве нового приращения x то же самое значение dx, можно найти дифференциал от dy.

Этот новый дифференциал называют *вторым дифференциалом* для функции $f(x)$ и обозначают как d^2y.

Согласно данному определению верны равенства

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dxdx = f''(x)(dx)^2\,,$$

что принято записывать в виде $d^2y = f''(x)dx^2$.

Рассуждая аналогично, для функций имеющих производную более высокого порядка можно ввести понятие дифференциала порядка n вида $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Следует иметь в виду важное обстоятельство (называемое *инвариантностью формы первого дифференциала*): формула $dy = f'(x)dx$ верна и в том случае, когда x является не независимой переменной, а некоторой функцией $x(t)$.

При $n > 1$ равенство $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$ верно только в случае, когда x независимая переменная. Например для второго дифференциала в случае $f(y = x(t))$ второй дифференциал находится по формуле

$$d^2y = f''_{xx}dx^2 + f'_x d^2x\,.$$

Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Рассмотрим теперь методы исследования функции в малой окрестности некоторой точки, основанные на использовании значений ее производных. Основой этих методов являются следующие теоремы, называемые *теоремами о среднем.*

`Теорема Ролля` **Если функция** $f(x)$

1) **непрерывна на** $[a, b]$,
2) **имеет в каждой точке** (a, b) **конечную или определенного знака бесконечную производную,**
3) **и верно равенство** $f(a) = f(b)$,

то $\exists \xi \in (a, b)$ **такая, что** $f'(\xi) = 0$.

Заметим, что в условиях теоремы Ролля, среди точек, для которых $f'(\xi) = 0$, всегда имеется точка экстремума функции $f(x)$.

Задача 6.3 *Доказать, что между двумя действительными корнями алгебраического многочлена с вещественными коэффициентами имеется корень его производной функции.*

Решение. Пусть $y(x) = P_n(x)$ алгебраический многочлен с вещественными коэффициентами, у которого a и b — соседние действительные корни.

Функция $y(x) = P_n(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда по теореме Ролля найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $P_n'(\xi) = 0$. То есть, ξ есть корень производной от алгебраического многочлена.

Решение получено.

`Теорема Лагранжа` **Если функция** $f(x)$

1) **непрерывна на** $[a,b]$,
2) **имеет в каждой точке** (a,b) **конечную или определенного знака бесконечную производную,**

то $\exists \xi \in (a,b)$ **такая, что** $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Утверждение теоремы Лагранжа часто называют *формулой конечных приращений.*

Из теоремы Лагранжа следует, что, если $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки, то $f'(x)$ непрерывна в x_0.

Задача 6.4 *Доказать, что* $\forall x > 0\ \ \exists \theta(x)$ *такое, что*

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

причем $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = \dfrac{1}{4}$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = \dfrac{1}{2}$.

Решение. По теореме Лагранжа, примененной для дифференцируемой функции $y = \sqrt{x}$ $x \in [x_0, x_0+1]$, имеем равенство $\sqrt{x_0+1} - \sqrt{x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$. Положив $\xi = x_0 + \theta(x)$, получим

$$\sqrt{x_0+1} - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0+\theta(x)}}$$

$$\sqrt{x_0+1} + \sqrt{x_0} = 2\sqrt{x_0+\theta(x)}\,.$$

Далее, возводя обе части равенства в квадрат, находим, что

$$\theta(x_0) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{x_0^2+x_0} - x_0}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+x_0} + x_0}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+0} \theta(x) = \dfrac{1}{4}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \theta(x) = \dfrac{1}{2}$.

Решение получено.

Теорема Коши

Если функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$

1) непрерывны на $[a,b]$,

2) имеют в каждой точке (a,b) конечные производные, причем $\phi'(t) \neq 0 \ \ \forall t \in (a,b)$,

то $\exists \xi \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\phi(b)-\phi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\phi'(\xi)}.$$

Из теоремы Коши следует полезное правило раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, называемое правилом Лопиталя.

Теорема Правило Лопиталя

Если функции $f(x)$ **и** $g(x)$

1) **дифференцируемы в проколотой окрестности точки** a, **причем** $g'(x) \neq 0$ **в этой окрестности,**
2) **функции** $f(x)$ **и** $g(x)$ **являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при** $x \to a$,
3) **существует конечный** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда верно равенство $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, **а для дифференцируемых и бесконечно малых в точке** a **функций** $f(x)$ **и** $g(x)$ **справедливо**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\,.$$

Проиллюстрируем применение правила Лопиталя на следующих примерах.

`Задача 6.5.` Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

`Решение.` Согласно правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

`Задача 6.6.` Найти $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3^x - 27}{x-3}$.

`Решение.` В данном случае мы имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, а, поскольку $(3^x - 27)' = 3^x \ln 3$ и $(x-3)' = 1 \neq 0$, то согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to3} \frac{3^x - 27}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{3^x \ln 3}{1} = 27 \ln 3\,.$$