

Формула Тейлора

Рассмотрим теперь методы исследования функции в малой окрестности некоторой точки, основанные на использовании ее производных в этой точке.

Пусть точка x_0 для функции $y = f(x)$ – внутренняя точка области определения, то есть существует окрестность x_0 целиком содержащаяся в области определения этой функции. И пусть в этой точке функция $y = f(x)$ имеет *непрерывные производные до n -ого порядка включительно*.

В ситуации, когда полное аналитическое описание (то есть, в виде формулы) функции $y = f(x)$ слишком сложно или же неизвестно вовсе, а нас интересует ее поведение лишь в относительно небольшой окрестности точки x_0 , представляется целесообразным использование приближенного описания этой функции в виде линейной комбинации степенных функций порядка не большего, чем n .

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^n A_k (x - x_0)^k,$$

где $A_k \forall k \in [0, n]$ – некоторые целые неотрицательные константы.

Более точно: будем предполагать, что в некоторой окрестности точки x_0 справедливо равенство

$$y(x) = \sum_{k=0}^n A_k (x - x_0)^k + r(x, x_0), \quad (9.1)$$

где $r(x, x_0)$ – функция погрешности аппроксимации, значением которой хотелось бы пренебречь при малых величинах $|x - x_0|$.

Понятно, что формула (9.1) может быть написана с любыми коэффициентами в ее аппроксимирующей части, однако можно ожидать, что качество аппроксимации (т.е. величина значений остаточного слагаемого $r(x, x_0)$) будет зависеть от выбора значений коэффициентов A_k .

Поскольку степенная аппроксимация остается «простой» при любых значениях параметров A_k , то имеет смысл выбирать их значения так, чтобы погрешность, возникающая при игнорировании (отбрасывании) остатка $r(x, x_0)$, была минимальной.

Для достижения этой цели поступим следующим образом.

Потребуем прежде всего, чтобы значение остаточной функции было равно нулю при $x = x_0$. Если записать соотношение (9.1) в виде

$$r(x, x_0) = y(x) - \sum_{k=0}^n A_k (x - x_0)^k, \quad (9.2)$$

то при $x = x_0$ оно превратится в равенство $y(x_0) = A_0 + r(x_0, x_0)$, из которого следует, что для выполнения условия $r(x_0, x_0) = 0$ нужно взять $A_0 = y(x_0)$.

Далее потребуем, чтобы первая производная остаточного члена также равнялась бы нулю при $x = x_0$.

Если функции равны, то очевидно равны и их производные функции, потому будет верным равенство, получаемое из (9.2) почленным дифференцированием

$$r'(x, x_0) = y'(x) - \sum_{k=1}^n k A_k (x - x_0)^{k-1}, \quad (9.3)$$

Откуда при $x = x_0$ получаем, что $r'(x_0, x_0) = 0$ обеспечивается при $A_1 = f'(x_0)$.

Рассуждая аналогично, получим, что производная остаточного члена порядка k обратится в 0 при $x = x_0$, если $f^{(k)}(x_0) = k! A_k$. Откуда

$$A_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0). \quad (9.4)$$

В итоге мы приходим к заключению, что «наилучшая» аппроксимация исходной функции $y = f(x)$, носящая название имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + r(x, x_0).$$

Пусть $y(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n - 1$ включительно и пусть существует $y'(x_0)$, тогда оказывается справедливой *теорема*:

Если в степенной аппроксимации ее коэффициенты выбраны по формулам (9.4), то $r(x, x_0) = o(x - x_0)^n$.

В этом случае равенство

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n \quad (9.5)$$

называется *разложением функции $y(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*.

Если же $y(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до порядка $n + 1$ включительно, то для любого x из этой окрестности $\exists \xi \in (x, x_0)$ или $\xi \in (x_0, x)$ такое, что $r(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$. Тогда принято говорить об *остаточном члене формулы Тейлора в форме Лагранжа*.

Равенство (9.5) в случае, когда $x_0 = 0$ принято называть *формулой Маклорена*.

Наконец, заметим, что $x - x_0 = dx$ и (9.5) записывается в виде

$$y(x) = y(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k y + o(x - x_0)^n.$$

Приведем формулы Маклорена для некоторых основных элементарных функций.

$$\begin{aligned} 1) \quad e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \operatorname{sh} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \operatorname{ch} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \sin x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \cos x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad (1+x)^a &= 1 + \sum_{k=1}^n C_a^k x^k + o(x^n) = \\ &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) = \\ &= 1 - x + x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) = \\ &= 1 + x + x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n) = \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) = \\
 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad \operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = \\
 &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6).
 \end{aligned}$$

Также могут оказаться полезными и разложения

$$12) \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6),$$

$$13) \quad \operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).$$

Пример 9.01. Разложить по формуле Тейлора $y(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + x - 12}$ в окрестности $x_0 = -1$.

Решение.

1) Чтобы использовать табличные формулы Маклорена, сделаем замену переменной $t = x + 1$, тогда $x = t - 1$ и

$$f(t) = \frac{(t-1)^2 + 5}{(t-1)^2 + (t-1) - 12} = \frac{t^2 - 2t + 6}{t^2 - t - 12} = \frac{t^2 - 2t + 6}{(t-4)(t+3)}.$$

2) Разложим $f(t)$ на простейшие дроби

$$f(t) = A + \frac{B}{t-4} + \frac{C}{t+3}.$$

Из условия $A(t-4)(t+3) + B(t+3) + C(t-4) = t^2 - 2t + 6$ находим, что $A = 1$, $B = 2$, $C = -3$, то есть

$$f(t) = 1 + \frac{2}{t-4} - \frac{3}{t+3}.$$

3) Преобразуем запись $f(t)$ к виду, удобному для использования табличных разложений

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{t}{4}} - \frac{1}{1 + \frac{t}{3}}$$

и используем формулы 7) и 8), получим

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{4^k} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k}{3^k} + o(t^n) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - 1\right) + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2 \cdot 4^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}\right) t^k + o(t^n). \end{aligned}$$

4) Наконец, возвращаемся к исходной независимой переменной x :

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k+1}}{3^k} - \frac{1}{2 \cdot 4^k} \right) (x+1)^k + o((x+1)^n).$$

Пример 9.02. Разложить по формуле Тейлора $y(x) = e^{2x^2-12x}$ в окрестности $x_0 = 3$.

Решение. 1) Чтобы использовать разложения по формуле Маклорена, введем новую переменную $t = x - 3$, и выразим $y(x)$ через t подстановкой $x = t + 3$, получим

$$f(t) = e^{2(t+3)^2-12(t+3)} = e^{2t^2-18}.$$

Применяя формулу 1) , приходим к

$$f(t) = e^{-18} \sum_{k=0}^n \frac{(2t^2)^k}{k!} + o((t^2)^n) = e^{-18} \sum_{k=0}^n \frac{2^k t^{2k}}{k!} + o(t^{2n+1})$$

2) Возвращаясь к исходной переменной x , получаем искомое разложение по формуле Тейлора

$$y(x) = e^{-18} \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} (x-3)^{2k} + o((x-3)^{2n+1}).$$

Пример 9.03. Получить разложение по формуле Маклорена для функции $y(x) = \cos 2x \sin x$.

Решение. 1) Применив тригонометрическую формулу

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2},$$

получим $y(x) = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin x$. Тогда согласно формуле 4)

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) + o(x^{2n+2})$$

И, окончательно,

$$y(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (3^{2k+1} - 1)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Пример 9.04. Представить формулой Тейлора функцию

$$y(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x-2}{5-x}}$$

в окрестности точки $x_0 = 3$.

Решение. 1) Чтобы применить разложения по формуле Маклорена, введем новую переменную $t = x-3$, и выразим $y(x)$ через t подстановкой $x = t + 3$, получим

$$\begin{aligned} f(t) &= \ln \sqrt[4]{\frac{1+t}{2-t}} = \frac{1}{4}(\ln(1+t) - \ln(2-t)) = \\ &= \frac{1}{4} \ln(1+t) - \frac{1}{4} \ln \left(2 \left(1 - \frac{t}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Применяя дважды формулу 10), находим, что

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k 2^k} t^k + o((t)^n) = \\ &= -\frac{1}{4} \ln 2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{k-1}}{4k} + \frac{1}{k 2^{k+2}} \right) t^k + o((t)^n) \end{aligned}$$

2) Возвращаясь к исходной переменной x , получаем искомое разложение по формуле Тейлора

$$y(x) = -\frac{1}{4} \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 2^k + 1}{4k 2^k} (x-3)^k + o((x-3)^n).$$

Пример 9.05. Разложить по формуле Маклорена $y(x) = (x - 1)e^{\frac{x}{2}}$.

Решение. 1) Согласно формуле 1) имеем

$$y(x) = (x - 1) \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!} x^k + o(x^n) \right).$$

Это верно, но не есть ответ на вопрос задачи.

2) Раскрыв внешние скобки, получим

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k k!} x^{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!} x^k + o(x^n).$$

Введем в первой сумме индекс суммирования $m = k + 1$. Тогда $k = m - 1$ и мы имеем

$$y(x) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{2^{m-1} (m-1)!} x^m - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!} x^k + o(x^n).$$

Значение суммы не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования. Заменяем в первой сумме m на k и запишем $y(x)$ в виде

$$\begin{aligned} y(x) &= -1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1} (k-1)!} x^k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k k!} x^k + o(x^n) = \\ &= -1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^{k-1} (k-1)!} - \frac{1}{2^k k!} \right) x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Последнее выражение можно немного упростить, написав

$$y(x) = -1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k (k-1)!} \left(2 - \frac{1}{k} \right) x^k + o(x^n).$$

Окончательно получаем

$$y(x) = -1 + \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k k!} x^k + o(x^n).$$

Пример 9.06. Разложить по формуле Маклорена $y(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

Решение. 1) Используя формулу 7) можно написать

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \sum_{k=0}^n (x+x^2)^k + o(x^{2n}).$$

Как и в предыдущей задаче, это верно, но не есть ответ, поскольку требуется формула вида

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \sum_{k=0}^n A_k x^k + o(x^n).$$

2) Преобразуем вначале $y(x)$, умножив числитель и знаменатель на $1-x$.

$$y(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3}.$$

Тогда по формуле 8) будет верным равенство

$$y(x) = (1-x) \left(\sum_{k=0}^n x^{3k} + o(x^{3n}) \right).$$

Запишем эту формулу без символа суммирования

$$y(x) = (1-x) \left(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots + x^{3n} + o(x^{3n}) \right)$$

или же, в порядке возрастания степеней x

$$y(x) = 1 - x + 0x^2 + x^3 - x^4 + 0x^5 + x^6 - x^7 + \dots + x^{3n} + o(x^{3n}).$$

То есть, числовая последовательность $\{A_k\}$ имеет вид

$$\{1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots\}$$

с периодически повторяющейся триадой членов $1, -1, 0$. Эту последовательность можно задать функционально, например, формулой

$$A_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right),$$

что позволяет записать ответ задачи в виде

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^n \sin \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right) \cdot x^k + o(x^n).$$

Пример 9.07. Получить формулу Маклорена для

$$y(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Решение. 1) Заметим, что в данном случае функция $y'(x)$ легко записывается в виде разложения по Маклорену при помощи формулы 7). Действительно

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

Интегрируя это равенство по x и учитывая, что $\operatorname{arctg} 0 = 0$, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$