

Вычисление пределов при помощи формулы Тейлора

Представление функций, использующее формуле Тейлора, может оказаться эффективным методом вычисления их пределов. Точнее говоря, это представление может использоваться для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и 1^∞ . Основой данного использования служит теорема 10.1.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ и $\exists m \in \mathbb{N}$ такое, что для них справедливы равенства $f(x) = ax^m + o(x^m)$ и $g(x) = bx^m + o(x^m)$ с $b \neq 0$. Тогда

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^m + o(x^m)}{bx^m + o(x^m)} = \frac{a}{b},$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + f(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + ax^m + o(x^m)\right)^{\frac{1}{bx^m + o(x^m)}} = e^{\frac{a}{b}}.$$

Напомним, что равенство

$$y(x) = \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (10.1)$$

называется *разложением функции $y(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*, а равенство (10.1) в случае, когда $x_0 = 0$ называется *формулой Маклорена*.

Приведем таблицу формул Маклорена для некоторых основных элементарных функций.

$$\begin{aligned} 1) \quad e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \operatorname{sh} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \operatorname{ch} x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \sin x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \cos x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad (1+x)^a &= 1 + \sum_{k=1}^n C_a^k x^k + o(x^n) = \\ &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) = \\ &= 1 - x + x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) = \\ &= 1 + x + x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n) = \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2), \\
10) \quad \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) = \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \\
11) \quad \operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Также могут оказаться полезными и разложения

$$\begin{aligned}
12) \quad \operatorname{tg} x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \\
13) \quad \operatorname{arcsin} x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).
\end{aligned}$$

Поясним идею данного метода следующим примером.

Пример 10.1 Найти $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2 \sin x}{x^3}$.

Решение. Согласно формулам 2) и 4) будут справедливы равенства

$$\operatorname{sh} 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^4) \quad \text{и} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4) - 2x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3} \right) = \\ &= \frac{5}{3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Особых комментариев приведенные преобразования не требуют. Отметим только, что были использованы равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{o(x^4)}{x^4} = 0 \quad \text{и} \quad o(x^4) + o(x^4) = o(x^4),$$

первое из которых следует из определения функции $o(x)$ а во втором (выглядящем диковато) просто все три функции $o(x)$ *разные* и правильнее была бы запись вида $o_{(1)}(x^4) + o_{(2)}(x^4) = o_{(3)}(x^4)$.

Заметим, что теорема 10.1 не дает способа нахождения величины m , хотя понятно, что эта величина определяется первыми ненулевыми членами в разложениях для функций $f(x)$ и $g(x)$. При решении задач можно лишь порекомендовать начинать построение разложения с наиболее простой из них. Следующие примеры иллюстрируют возможную целесообразность такого подхода.

Пример 10.2 Найти $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1 + \sin x} + \ln(1 - x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

Решение. 1) Знаменатель здесь явно проще числителя. Поэтому начнем с него. Из табличных формул 4) и 12) имеем

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad \text{и} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Следовательно, знаменатель равен $\frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$, при этом $m = 3$.

2) В числителе первое слагаемое равно произведению x на сложную (т.е. суперпозицию) функцию $\sqrt{1 + \sin x}$. Поэтому последнюю достаточно разложить до $o(x^2)$, поскольку $x o(x^2) = o(x^3)$.

По табличной формуле 4), где $a = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}t^2 + o(t^2) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2),\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sin x} &= 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \right)^2 + o(x^2) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Заметьте, что здесь мы вначале воспользовались известной формулой

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc, \quad (10.2)$$

а затем собрали в $o(x^2)$ все слагаемые более высокого порядка малости.

3) Табличная формула 10) для логарифмической функции дает

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

что, вместе с полученным в 3) разложением, позволяет записать разложение по Маклорену для всего числителя

$$\begin{aligned} x \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \right) - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) &= \\ &= -\frac{11}{24}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

И, окончательно,
$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{11}{24}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{11}{12}.$$

Пример 10.3 Найти $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1 - \sin x) - 1}{\sqrt[3]{8 - x^4} - 2}$.

Решение. 1) Знаменатель в этой задаче также более простой по сравнению с числителем. Для знаменателя, используя табличную формулу 6) с $a = \frac{1}{3}$, имеем

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8 - x^4} - 2 &= 2 \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{8}x^4} - 1 \right) = \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 \right) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Значит, $m = 4$.

2) Для построения разложения числителя нам потребуются следующие табличные формулы

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Конкретно, для второго слагаемого в числителе, снова используя формулу (10.2), находим

$$\begin{aligned} \ln(1-\sin x) &= \\ &= -\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) = \\ &= -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) = \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$

В итоге формула для числителя принимает вид

$$\begin{aligned} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - 1 + o(x^4) &= \\ = -\frac{x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

3) Таким образом, окончательно, мы получаем

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{2}.$$

Иногда для построения маклореновской аппроксимации оказывается целесообразным комбинирование использования табличных разложений и ее определения, т.е. формулы (10.1). Приведем пример такой ситуации.

Пример 10.4 Найти $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3 + x^2) - \operatorname{arctg}(2 + \cos x)}{\ln(1 + x) - e^x + 1}$.

Решение. 1) Поскольку справедливы разложения

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) \quad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

то для знаменателя легко получаем

$$x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2).$$

2) В этом примере $m = 2$ и разложения для числителя несложно вычислить при помощи формулы (10.1). Для этого надо в точке $x = 0$ найти значения как самого числителя, так и его производных до второго порядка включительно.

Значение числителя $\Phi(x)$ в нуле очевидно равно нулю. Выпишем формулу для его первой производной, не выполняя каких-либо упрощений. Имеем

$$\Phi'(x) = \frac{2x}{1 + (3 + x^2)^2} - \frac{-\sin x}{1 + (2 + \cos x)^2}$$

Также очевидно, что $\Phi'(0) = 0$.

3) $\Phi''(x)$ ищем по правилу дифференцирования. Имеем для первого слагаемого в $\Phi'(x)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x}{1 + (3 + x^2)^2} \right)' &= \frac{2(1 + (3 + x^2)^2) - 2x(1 + (3 + x^2)^2)'_x}{(1 + (3 + x^2)^2)^2} = \\ &= \frac{2(1 + 3^2) - 0}{(1 + 3^2)^2} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Аналогично находим для второго слагаемого в $\Phi'(x)$

$$\left(\frac{-\sin x}{1 + (2 + \cos x)^2} \right)' = -\frac{1}{10}.$$

Проверьте это самостоятельно.

4) Теперь, используя (10.1), запишем разложение для всего числителя

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \Phi'(0)x + \frac{1}{2}\Phi''(0)x^2 + o(x^2).$$

Подставляя, получим

$$\Phi(x) = 0 + 0x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{10} \right) \right) x^2 + o(x^2) = \frac{3}{20}x^2 + o(x^2).$$

Окончательно
$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{20}x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = -\frac{3}{20}.$$

Пример 10.5 Найти первые три члена разложения в формуле Маклорена для функции $\operatorname{tg} x$.

Решение. 1) Используем табличные разложения для функций $\sin x$ и $\cos x$, а также разложение с неопределенными коэффициентами для нечетной функции $\operatorname{tg} x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),$$

$$\operatorname{tg} x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

2) Значения неопределенных коэффициентов найдем при помощи равенства

$$\cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x,$$

которое во введенных обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)) = \\ = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right). \end{aligned}$$

3) Перемножив многочлены в левой части и приравняв коэффициенты при равных степенях x в обеих частях, получаем значения искоемых коэффициентов

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{2}{15}.$$

Рассмотрим теперь пример вычисления предела вида, указанного в п. 2) теоремы 10.1.

Пример 10.6 Найти $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+2x} \cdot \cos x - \frac{\arcsin x}{1+x} \right) \frac{x}{(1-\operatorname{ch} x)^2}$.

Решение. 1) Поскольку функция, являющаяся показателем, проще основания, начнем с поиска разложения для показателя. Имеем

$$1 - \operatorname{ch} x = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \Rightarrow \quad (1 - \operatorname{ch} x)^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$$

Тогда

$$\frac{x}{(1 - \operatorname{ch} x)^2} = \frac{x}{\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{\frac{1}{4}x^3 + o(x^3)}.$$

Значит, $m = 3$.

2) Разложение основания получаем следующим образом. Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3),$$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}2x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}4x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}8x^3 + o(x^3) =$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

Тогда

$$\sqrt{1+2x} \cdot \cos x =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) \cdot \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right) =$$

$$= 1 + x - x^2 + o(x^3).$$

Аналогично, учитывая табличные формулы 13) и 6), из

$$\arcsin x = 1 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3),$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\arcsin x}{1+x} &= \\ &= \left(1 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) \cdot (1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) = \\ &= x - x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

В итоге для основания получаем $1 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.

3) Окончательно, по п. 2) теоремы 10.1 получаем

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)\right)^{\frac{1}{4x^3 + o(x^3)}} = e^{\frac{5}{6} \cdot 4} = e^{\frac{10}{3}}.$$

Заметим, что в условиях теоремы 10.1 будет справедливым равенство $A = e^B$, где $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + f(x))}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. (10.3)

Рассмотрим еще один пример раскрытия неопределенности 1^∞ .

Пример 10.7 Найдите $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x} - \frac{2}{3}x^2 \right)^{\frac{x^2}{x^2 - \operatorname{arctg} x^2}}$.

Решение. 1) Начнем с построения разложения для показателя степени. Имеем

$$\frac{x^2}{x^2 - \operatorname{arctg} x^2} = \frac{x^2}{x^2 - \left(x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^9) \right)} = \frac{1}{\frac{x^4}{3} + o(x^7)}.$$

То есть, $m = 4$.

2) Чтобы получить формулу Маклорена для основания, предварительно разложим до $o(x^4)$ дробь

$$\begin{aligned} \frac{2x}{\sin 2x} &= \frac{2x}{2x - \frac{1}{6}8x^3 + \frac{1}{120}32x^5 + o(x^6)} = \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + o(x^5)\right)} = \\ &= 1 + \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + o(x^5)\right) + \left(\frac{2}{3}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(x^5) = \\ &= 1 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{15}x^4 + \frac{4}{9}x^4 + o(x^5) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{45}x^4 + o(x^5). \end{aligned}$$

В итоге маклореновское представление основания будет

$$\frac{2x}{\sin 2x} - \frac{2}{3}x^2 = 1 + \frac{14}{45}x^4 + o(x^5).$$

Окончательно, применяя второе утверждение теоремы

10.1, получаем $A = e^{\frac{14}{45} \cdot 3} = e^{\frac{14}{15}}.$