

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Двойные интегралы

В начале, для большей наглядности, рассмотрим двумерный случай.

Пусть дана дважды непрерывная в некоторой, измеримой по Жордану (с мерой μ), области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x, y)$.

И пусть для этого множества выполнено разбиение $\{\Omega_k, k = [1, N]\}$ с мелкостью этого разбиения, определяемого некоторым функционалом $\tau = T(\{\mu(\Omega_k), k = [1, N]\})$.

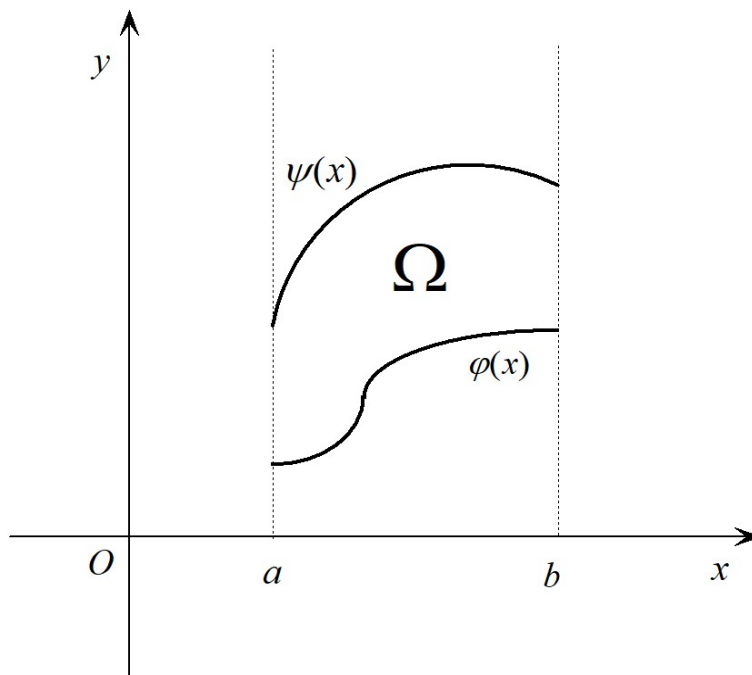
Далее, в каждом Ω_k выбрана произвольная точка $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$, совокупность которых обозначим Θ_τ .

Тогда *римановской суммой* от функции $f(x, y)$ по области Ω называется

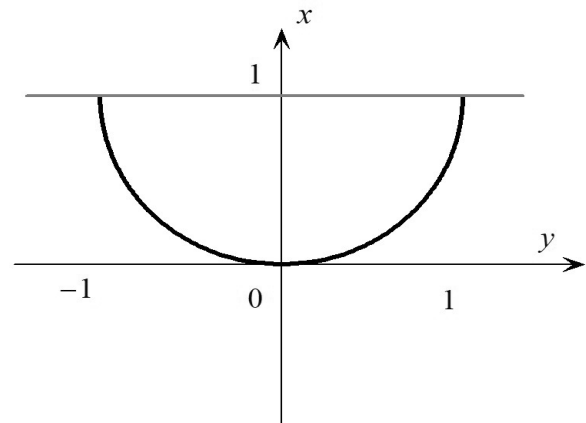
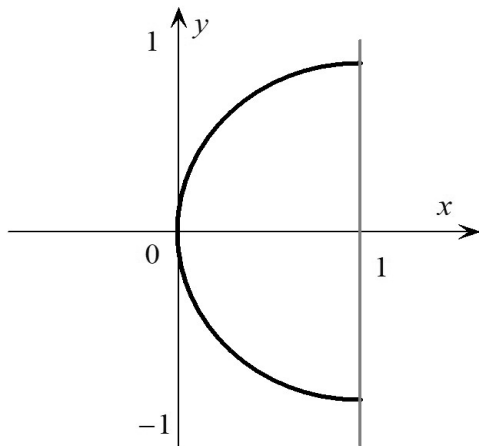
выражение вида
$$\sigma_\tau(f; \Theta_\tau) = \sum_{k=1}^N f(x_k, y_k) \mu(\Omega_k).$$

Двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области Ω называется число $J = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma_\tau$ - предел ее римановской суммы при мелкости разбиения $\tau \rightarrow 0$.

Область Ω называется элементарной относительно оси Oy , если существуют функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ $x \in [a, b]$, такие, что $\Omega = \begin{cases} \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \\ x \in [a, b]. \end{cases}$



Если область Ω элементарна относительно оси Oy , то двойной интеграл, обозначаемый как $J = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, равен $J = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$.



Пример 1: Найти $J = \iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, если $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ y^2 \leq x. \end{array} \right\}$

Решение: 1) Заметим, что область Ω элементарна относительно оси Oy и $\varphi(x) = -\sqrt{x}$, $\psi(x) = \sqrt{x}$. Поэтому

$$J = \iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 x dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2 dy = \int_0^1 x \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{3} \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{21}.$$

2) Можно также заметить, что область Ω элементарна относительно оси Ox с $\varphi(y) = y^2$, $\psi(y) = 1$. Значит, двойной интеграл можно считать иначе

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_{-1}^1 y^2 dy \int_{y^2}^1 x dx = \int_{-1}^1 y^2 \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^1 \right) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^2 (1 - y^4) dy = \\ &= \int_0^1 y^2 (1 - y^4) dy = \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

3) Результаты получились одинаковые. Это теорема!

Пример 2: Найдите двойной интеграл $J = \iint_{\Omega} (x+2y) dx dy$, если область имеет вид

$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 3, \\ x \leq y \leq 2x. \end{array} \right\}$, выбрав наиболее удобный порядок последовательного интегрирования.

Решение: 1) Заметим, что область Ω элементарна относительно оси Oy с $\varphi(x) = x, \psi(x) = 2x$. Относительно оси Ox она не элементарна, но ее можно разбить на три части, каждая из которых элементарна относительно оси Ox . Однако придется считать три двойных интеграла по областям I, II, III . Свойство адитивности интеграла.

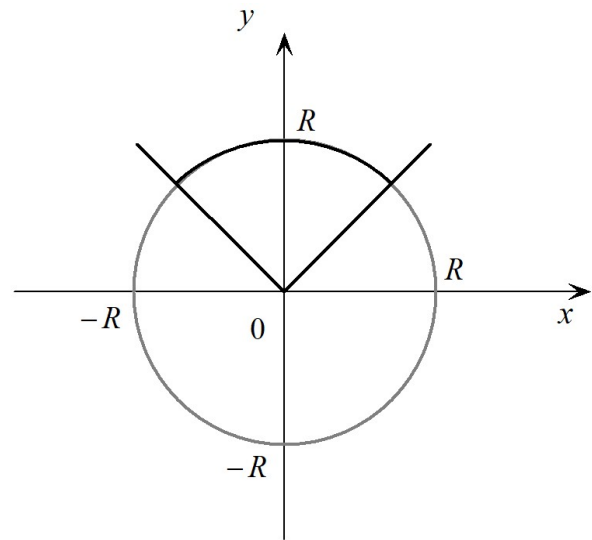
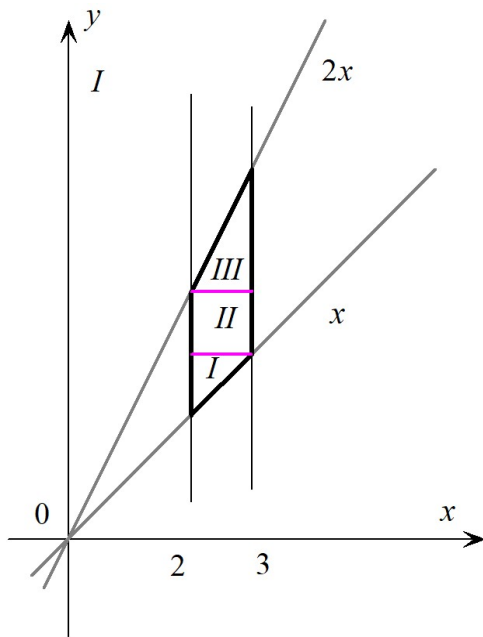
2) Поэтому лучше считать так:

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Omega} (x+2y) dx dy = \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y) dy = \int_2^3 [(xy + y^2) \Big|_x^{2x}] dx = \\ &= \int_2^3 [(2x^2 + 4x^2) - (x^2 + x^2)] dx = 4 \int_2^3 x^2 dy = \frac{76}{4}. \end{aligned}$$

Нередко вычисление двойных интегралов можно упростить, сделав подходящую нелинейную замену переменных.

Пример 3: Найдите двойной интеграл $J = \iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, если область имеет вид

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq R^2, \\ |x| \leq y. \end{array} \right\}, \text{ перейдя в полярную систему координат.}$$



Решение: 1) Область Ω элементарна относительно оси Oy с $\varphi(x) = |x|$, $\psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, но интегралы получаются довольно сложные.

2) Существенно проще вычисления оказываются, если перейти в полярную систему координат по формулам $\begin{cases} x = r \cos \alpha, \\ y = r \sin \alpha. \end{cases}$

При такой замене $dx dy = r dr d\alpha$ (модуль якобиана равен r), и задача сводится к нахождению двойного интеграла вида

$$J = \iint_{\Omega^*} (r \cos \alpha + r \sin \alpha) r dr d\alpha,$$

где область Ω^* является *прямоугольником* $\begin{cases} 0 \leq r \leq R, \\ \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ в переменных r и α .

3) Поскольку интегралы по полярным координатам оказываются на прямоугольнике Ω^* независимыми, то вычисления сильно упрощаются:

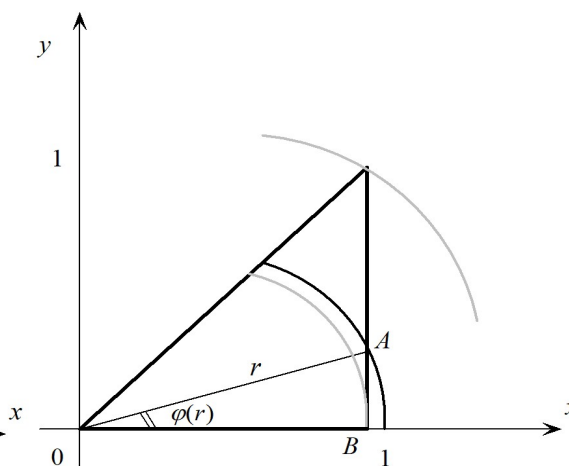
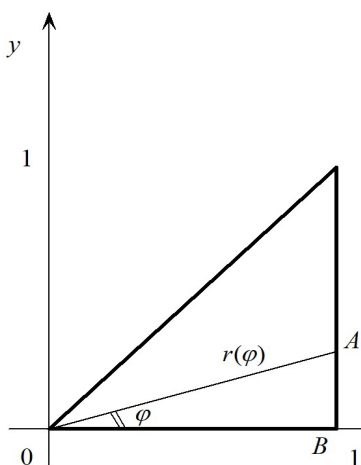
$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Omega^*} (r \cos \alpha + r \sin \alpha) r \, dr \, d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos \alpha + \sin \alpha) d\alpha \int_0^R r^2 \, dr = \\ &= \frac{R^3}{3} (\sin \alpha - \cos \alpha) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{R^3 \sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Задача 3: в интеграле $I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле двумя способами, если

$$1) \quad \Omega: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ y \geq 0, \\ x \geq y, \end{cases}$$

$$2) \quad \Omega: \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 1. \end{cases}$$

Решение: 1)



а) Пусть φ - внешняя переменная, а r - внутренняя. Тогда $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$,
где $r(\varphi) = |OA|$.

В нашем случае, из ΔOAB следует, что $\cos \varphi = \frac{1}{r(\varphi)}$. Поэтому $r(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi}$ и, окончательно,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

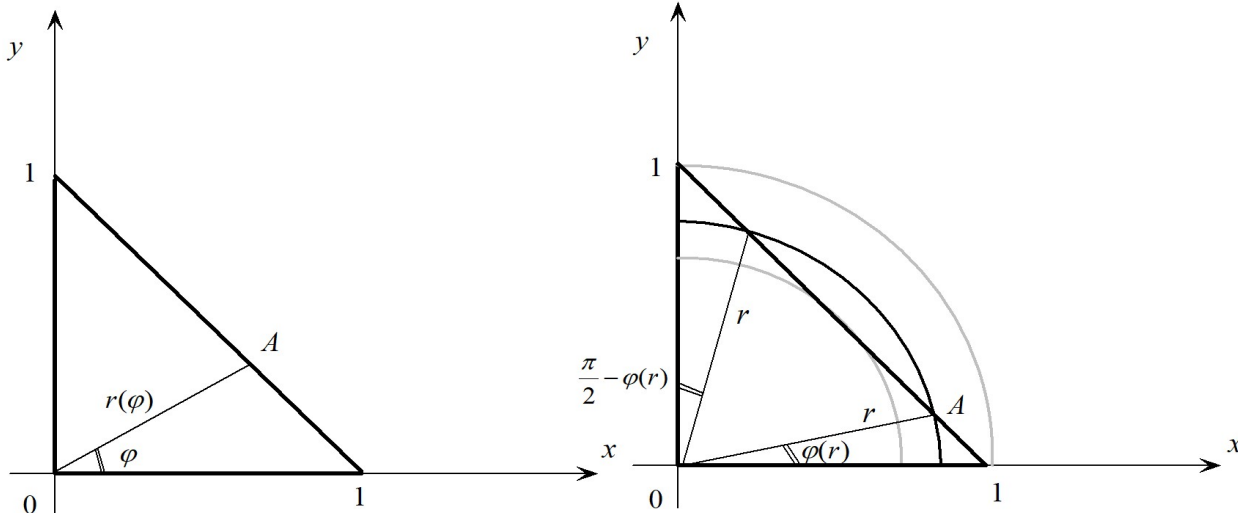
б) Пусть r - внешняя переменная, а φ - внутренняя. Тогда

$$I = \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\varphi(r)}^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi,$$

где из $\triangle OAB$ находим, что $\cos \varphi(r) = \frac{1}{r}$ или $\varphi(r) = \arccos \frac{1}{r}$. Т.е.

$$I = \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

2)



\

а) Пусть φ - внешняя переменная, а r - внутренняя. Тогда
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr,$$
 где $r(\varphi) = |OA|$.

В нашем случае, из принадлежности точки A гипотенузе следует, что $x_A + y_A = 1$ или, в полярных координатах $r(\varphi) \cos \varphi + r(\varphi) \sin \varphi = 1 \Rightarrow r(\varphi) \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Поэтому $r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$ и, окончательно
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

б) Пусть r - внешняя переменная, а φ - внутренняя. Тогда удобно разбить промежуток изменения r на два: $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ и $r \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. Тогда получим, что интеграл по всей области представим в виде

ставим в виде

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_0^{\varphi(r)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{2}-\varphi(r)}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi,$$

где функция $\varphi(r)$ находится из условия принадлежности точки A гипотенузе:

$$r \cos \varphi(r) + r \sin \varphi(r) = 1 \Rightarrow r(\varphi) \sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\varphi(r) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{r\sqrt{2}}.$$

То есть, $\varphi(r) = \arcsin \frac{1}{r\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$.