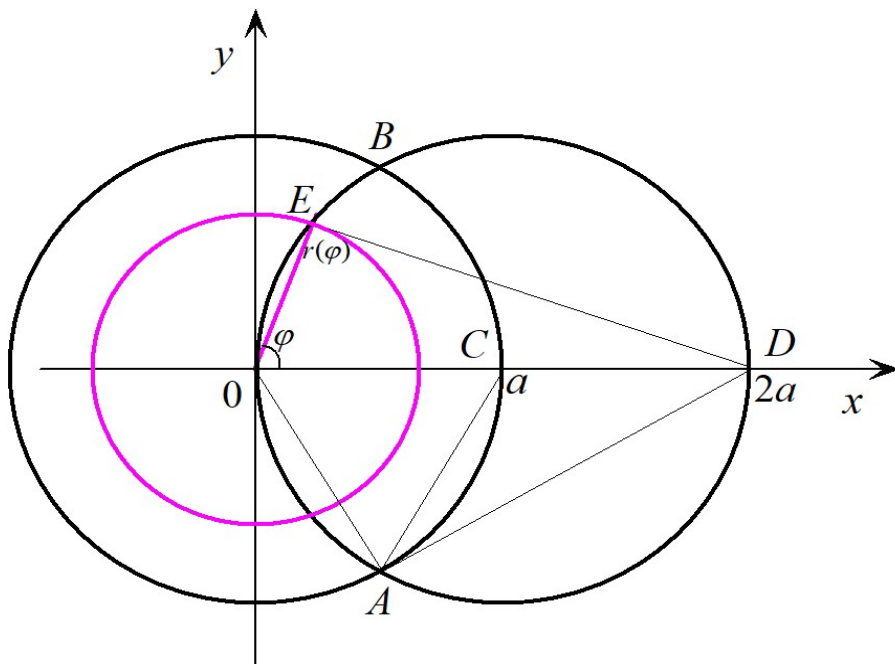


В следующей задаче укажем лишь идею решения и ответ. Проверьте его самостоятельно.



Задача 4: В интеграле $I = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в соответствующем повторном интеграле двумя способами, если $\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2, & a > 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2ax. \end{cases}$

Решение: 1) Заметим, что треугольник OAC правильный, а треугольник OED прямоугольный. Откуда можно получить, что $r(\varphi) = 2a \cos \varphi$.

2) Область в данной задаче - сдвоенный сегмент $OBCA$. При этом область элементарна при обеих последовательностях одномерного интегрирования, но при внешней переменной φ верхняя граница состоит из трех функций, а при внешней переменной r - из одной.

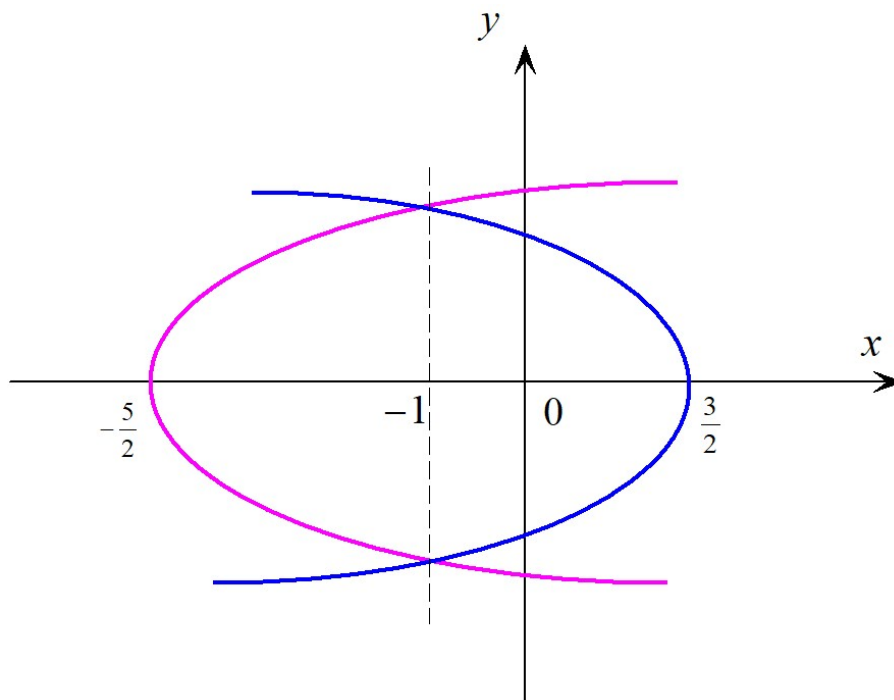
Ответ: 1) если внешняя переменная последовательного интегрирования φ , то

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \\ + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^a f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

2) если внешняя переменная последовательного интегрирования r , то

$$I = \int_0^a r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2a}}^{\arccos \frac{r}{2a}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi.$$

Задача 5: На плоскости Oxy в прямоугольной системе координат найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9 - 6x$ и $y^2 = 10x + 25$.



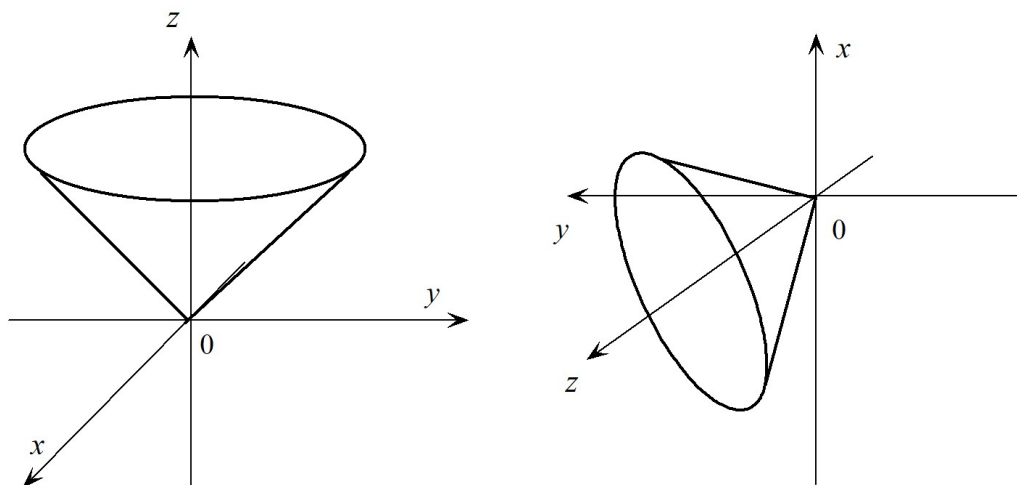
Решение: 1) Воспользуемся теоремой о том, что площадь области Ω определяется формулой

$$S = \iint_{\Omega} dx dy. \text{ Заметим, что координаты точек пересечения парабол } \left\| \begin{matrix} -1 \\ \pm \sqrt{15} \end{matrix} \right\|.$$

2) В данном случае удобнее воспользоваться элементарностью области Ω относительно оси Ox . В этом случае имеем

$$S = \iint_{\Omega} dx dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{16}} dx = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} x \Big|_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{16}} dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9-y^2}{16} - \frac{y^2-25}{10} \right) dy = \frac{16\sqrt{15}}{3}.$$

Рассмотрим теперь примеры стереометрических задач.



Задача 6: Переставить пределы повторного интегрирования в порядке $\{z, y, x\}$ для интеграла

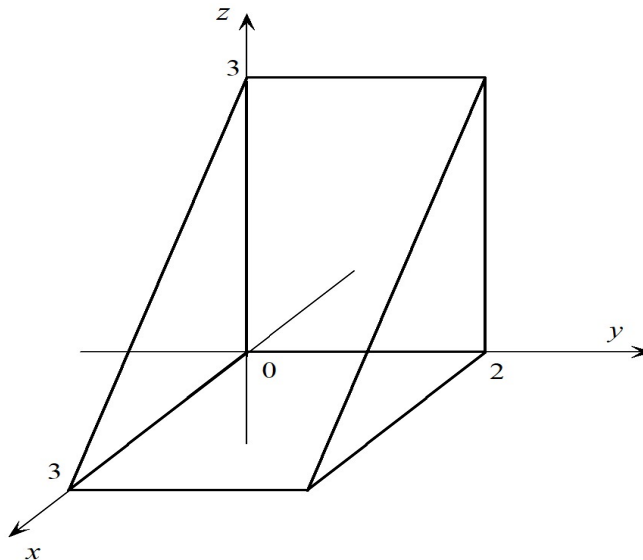
$$J = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$$

Решение: 1) Заметим, что тело V ограничено снизу частью конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, а сверху плоскостью $z = 1$.

2) После указанного изменения порядка интегрирования, применяя к области V метод секущих плоскостей, получаем

$$J = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx.$$

Задача 7: Вычислить интеграл $J = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, где область V лежит в положительном ортанте и ограничена плоскостями $y = 2$ и $x + y = 3$.



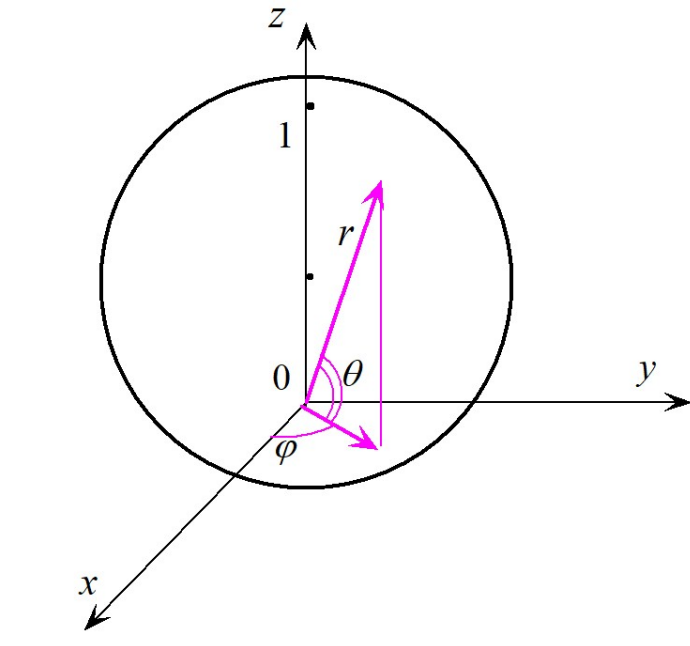
Решение: 1) В данной задаче V есть прямая треугольная призма. Координаты точек в V

удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 3 - x, \\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

2) Поэтому (проверьте выкладки)

$$J = \int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^{3-x} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \ln \sqrt{2} - \frac{1}{8}.$$

Задача 8: Вычислить интеграл $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.



Решение: 1) Область V есть шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, а каноническое уравне-

ние его поверхности $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

2) Перейдем в сферическую систему координат по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \text{ с модулем якобиана } |J| = r^2 \cos \theta.$$

3) Поскольку на границе области V имеем $r^2 = r \sin \theta$, то здесь будет $r = \sin \theta$.

Откуда получаем, что в сферических координатах $V^* = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq \sin \theta. \end{array} \right.$

4) В итоге

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{V^*} r^3 \cos \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sin \theta} r^3 dr = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$