

**КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Определения, обозначения и правила вычисления

<p>В E^3 с ОНБ заданы:</p>	<p>Скалярное поле $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$</p>	<p>Векторное поле $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{cases}$</p>
<p>Линия Γ $\vec{r} = \vec{r}(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$</p> <p>или в координатах</p> $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ <p>Функции $x(t), y(t), z(t)$ непрер. дифф. для $t \in [\alpha, \beta]$</p>	<p><i>Криволинейный интеграл первого рода</i></p> $\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl =$ $= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt$	<p><i>Криволинейный интеграл второго рода</i></p> $\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz =$ $= \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x_t' + Q(x(t), y(t), z(t))y_t' + R(x(t), y(t), z(t))z_t') dt$
<p>Поверхность S $\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad (u, v) \in \Omega \subseteq E^2$</p> <p>или в координатах</p> $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ <p>Функции $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ непр.о дифф. для $(u, v) \in \Omega \subseteq E^2$</p>	<p><i>Поверхностный интеграл первого рода</i></p> $\iint_S f(x, y, z) ds =$ $= \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv, \text{ где}$ $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$ $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$ $F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$	<p><i>Поверхностный интеграл второго рода</i></p> $\iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy =$ $= \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) & Q(\dots\dots\dots) & R(\dots\dots\dots) \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv$

**КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

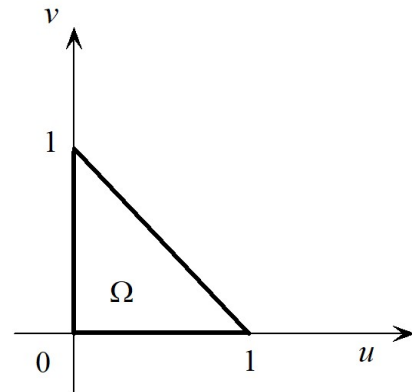
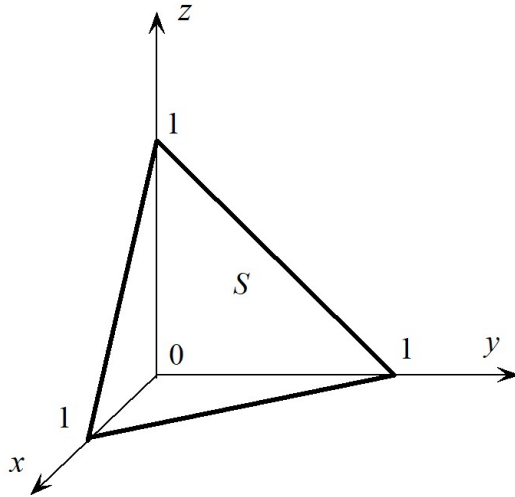
Свойства

Криволинейный интеграл первого рода при изменении направления обхода не меняет знака, а второго рода - меняет на противоположный.

Поверхностный интеграл первого рода при изменении ориентации поверхности не меняет знака, а второго рода - меняет на противоположную.

Свойства криволинейного интеграла второго рода от полного дифференциала.

Пример 01 .Вычислить $\iint_S xyz \, ds$, где S :
$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0 \end{cases} .$$



Решение: 1) Делаем параметризацию поверхности S :
$$\begin{cases} x(u, v) = u, \\ y(u, v) = v, \\ z(u, v) = 1 - u - v \end{cases} ,$$
 где $(u, v) \in \Omega$.

2) В нашем случае $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = uv - u^2v - uv^2$,

3) Находим $E = 2, G = 2, F = 1 \quad \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{3}$.

4) Формулируем и вычисляем интеграл $J = \iint_{\Omega} (uv - u^2v - uv^2) \sqrt{3} \, dudv = \frac{\sqrt{3}}{120}$.

Пример 02 .Вычислить $\iint_S z \, dx \, dy$, где $S: \begin{cases} x^2 \\ a^2 \end{cases} + \begin{cases} y^2 \\ b^2 \end{cases} + \begin{cases} z^2 \\ c^2 \end{cases} = 1$.

Решение: 1) Делаем параметризацию поверхности $S: \begin{cases} x(u, v) = a \cos u \cos v, \\ y(u, v) = b \sin u \cos v, \\ z(u, v) = c \sin v \end{cases}$,

$$\text{где } (u, v) \in \Omega = \begin{cases} 0 \leq u < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

2) Формулируем и вычисляем интеграл

$$J = \iint_{\Omega} \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \sin v \\ -a \sin u \cos v & b \cos u \sin v & 0 \\ -a \cos u \sin v & -b \sin u \sin v & c \cos v \end{vmatrix} dudv = \iint_{\Omega} Hc \sin v \, dudv,$$

где $H = ab \sin v \cos v$.

Таким образом, $J = \iint_{\Omega} abc \sin^2 v \cos v \, dudv = \frac{4\pi}{3} abc$.