

Элементы теории поля

Пусть Ω - область в E^3 с правой прямоугольной декартовой системой координат. Будем обозначать радиус-вектор точки в этой области как \vec{r} с координатным представлением

$$\text{вида } \left\| \vec{r} \right\| = \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\|.$$

Пусть в области Ω задано скалярное поле $f(x, y, z)$ и векторное поле $\vec{F}(x, y, z)$ с координатным представлением

$$\left\| \vec{F} \right\| = \left\| \begin{array}{c} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{array} \right\|.$$

Введем (по определению) векторно-дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$, называемый "набла"

$$\text{и имеющий координатное представление } \left\| \vec{\nabla} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\|.$$

Используя этот оператора, следует учитывать, что

- 1°. $\vec{\nabla}$ ведет себя как вектор, удовлетворяющий всем правилам действий с векторами;
- 2°. $\vec{\nabla}$ является дифференциальным оператором, подчиняющимся правилам дифференцирования. При этом предметом его действия должен быть объект, расположенный справа от $\vec{\nabla}$. В случае, когда этот объект не определяется однозначно, требуется явно его указывать, выделяя в записи верхней стрелкой.

Пример 1. Записать в координатной форме выражение $(\vec{\nabla}, \varphi \vec{W})$, где $\varphi(x, y, z)$ - скалярная, непрерывно дифференцируемая функция, а $\vec{W}(x, y, z)$ - векторная, также непрерывно дифференцируемая функция с координатным представлением

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} W_x(x, y, z) \\ W_y(x, y, z) \\ W_z(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Решение; Поскольку набла дифференциальный оператор, то, используя свойства скалярного произведения вектора и ортонормированность базиса, получаем

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}, \varphi \vec{W}) &= (\vec{\nabla}, \varphi \vec{W}) + (\vec{\nabla}, \varphi \vec{W}) = (\vec{\nabla} \varphi, \vec{W}) + \varphi (\vec{\nabla}, \vec{W}) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} W_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} W_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} W_z + \varphi \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Одной из основных характеристик, используемых при описании скалярного поля является *градиент*.

Определение: *Градиентом скалярного поля* $f(x, y, z)$ называется векторная функция

вида $\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$. Эта функция имеет координатное

представление $\|\text{grad } f\| = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right\|$.

Заметим, что с помощью оператора набла вектор градиента может быть записан так $\text{grad } f = \nabla f$.

При описании свойств векторных полей в приложениях часто используются две следующие характеристики: скалярная, называемая *дивергенцией*, и векторная, называемая *ротором* (иногда, *ротацией* или *вихрем*).

Определение: *Дивергенцией* векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$ называется скалярная функция

$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, которая с помощью набла задается формулой

$\text{div } \vec{F} = (\nabla, \vec{F})$.

Определение: *Ротором* векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$ называется векторная функция

$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$, ко-

торая с помощью набла задается формулой $\text{rot } \vec{F} = [\nabla, \vec{F}]$.

Нетрудно убедиться, что, в силу сделанных определений, справедливы следующие равенства $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ и $\operatorname{rot} \vec{r} = \vec{o}$.

Пример 01. Найти, используя оператор набла,

1) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f$,

2) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F}$,

3) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$,

Решение: Учитывая, что набла одновременно обладает свойствами вектора и дифференциального оператора, получаем:

1) Воспользуемся тем, что из векторного произведения можно выносить скалярный множитель, который мы обязаны записать *справа* от действующего на него оператора, а также тем, что векторное произведение вектора на самого себя равно нулевому вектору. Тогда получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \nabla] f = \vec{o}.$$

2) В этом случае воспользуемся возможностью циклической перестановки сомножителей в смешанном произведении и коммутативностью скалярного произведения для соблюдения требования расположения оператора. В результате имеем:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = (\nabla, [\nabla, \vec{F}]) = ([\nabla, \nabla], \vec{F}) = (\vec{o}, \vec{F}) = 0.$$

3) Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} f &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) = (\nabla, \nabla f) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = \Delta f ,\end{aligned}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

Пример 02. Для известных векторных полей $\vec{A}(x, y, z)$ и $\vec{B}(x, y, z)$ найти $\operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}]$.

Решение: Используем верхнюю стрелку для указания объекта, на который действует оператор набла. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}] &= (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) = (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) + (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) = \\ &= (\vec{B}, [\nabla, \vec{A}]) + (\vec{A}, [\vec{B}, \nabla]) = (\vec{B}, [\nabla, \vec{A}]) - (\vec{A}, [\nabla, \vec{B}]) = \\ &= (\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A}) - (\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B}). \end{aligned}$$

Пример 03. Для известных полей $f(x, y, z)$ и $\vec{F}(x, y, z)$ найти $\text{rot}(f\vec{F})$.

Решение: Используем верхнюю стрелку для указания объекта, на который действует оператор набла. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\text{rot}(f\vec{F}) &= [\nabla, (f\vec{F})] = [\nabla, (f\vec{F})] + [\nabla, (f\vec{F})] = \\ &= [\nabla f, \vec{F}] + f[\nabla, \vec{F}] = [\text{grad } f, \vec{F}] + f \text{rot } \vec{F}.\end{aligned}$$

- Пример 04. 1) Найти $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
 2) Для какого скалярного поля будет $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = 0$?

Решение: 1) Введем обозначения $P = \frac{\partial f(r)}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial f(r)}{\partial y}$; $R = \frac{\partial f(r)}{\partial z}$. Тогда имеем

$$P = \frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot r'_x = f'(r) \cdot \frac{x}{r}$$

$$Q = \frac{\partial f(r)}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{y}{r};$$

$$R = \frac{\partial f(r)}{\partial z} = f'(r) \cdot \frac{z}{r}.$$

$$\text{Откуда } \operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r} \vec{r}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{f'(r)}{r} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f'(r)}{r} \right) = \frac{f'(r)}{r} + x \frac{d}{dr} \left(\frac{f'(r)}{r} \right) \cdot r'_x =$$

$$= \frac{f'(r)}{r} + x \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{f'(r)}{r} + x^2 \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}.$$

Аналогично получим, что

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{f'(r)}{r} + y^2 \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3} \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{f'(r)}{r} + z^2 \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3}$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = \frac{3f'(r)}{r} + \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^3} r^2 = f'' + \frac{2f'(r)}{r}$$

2) Теперь найдем, в случае какого поля $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = 0$.

Решим уравнение $f'' + \frac{2f'(r)}{r} = 0$.

Понизим порядок заменой $u(r) = f'(r)$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' + \frac{2u}{r} = 0$. Это дает $u(r) = \frac{C_1}{r^2}$. Откуда, окончательно, $f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad \forall C_1, C_2$.

Пример 05. Показать, что поток векторного поля $\vec{F} = \vec{r}$ через любую кусочно гладкую замкнутую поверхность равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

Решение: `Справедливость утверждения следует из формулы Гаусса-Остроградского и равенства $\operatorname{div} \vec{r} = 3$.

Пример 06. Показать, что из уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме следует, что как электрическое, так и магнитное поле удовлетворяют однородному уравнению гармонических колебаний.

Решение: `1) Уравнения Максвелла в данном случае могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{B} = 0. \end{cases}$$

Если взять ротор от обеих частей первого уравнения, то получим равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B},$$

правая часть которого есть, в силу третьего уравнения $-\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, а левая вычисляется при помощи оператора набла и формулы для двойного векторного произведения

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = [\nabla, [\nabla, \vec{E}]] = \nabla(\nabla, \vec{E}) - (\nabla, \nabla) \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}.$$

Поскольку в силу второго уравнения системы $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то мы приходим к

уравнению $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

Для поля \vec{B} рассуждения аналогичные.