ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Напомним правило дифференцирования суперпозиции функций:

Пусть дана функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ и n-мерная вектор-функция $\vec{x}(t)$, где $t \in [a,b] \subset R$. Тогда *полная* производная функция от скалярной функции $\Phi(t) = F(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t)$ имеет вид

$$\frac{d\Phi}{d\,t} = \frac{\partial \Phi}{\partial\,t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial\,x_j} \frac{dx_j}{d\,t}. \tag{1}$$

Ясно, что эту формулу можно применять и для случая, когда независимая переменная есть k-мерный вектор, то есть

$$\Phi(\vec{t}) = F[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k), t_1, t_2, \ldots, t_k]$$

только *полную и одновременно частную* производную стоит обозначать специальным образом, чтобы ее не путать с *частной*. Обычно пишут так

$$\Phi'_{t_p} = \frac{\partial \Phi}{\partial\,t_p} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial\,x_j} \frac{dx_j}{d\,t_p} \quad \forall j \in [1,k]. \tag{2}$$

Это обеспечивает разницу в обозначениях для функции в левой части равенства и первого слагаемого в правой.

Формулы (1) и (2) применимы в самом простом случае, когда формульное представление функций $F(\ldots)$ и $\vec{x}(\ldots)$ известно. Однако на практике (сам с этим сталкивался не раз) часто оказывается, что эти функции заданы *неявно*: скажем, как решения некоторых других задач.

Поясним эту ситуацию следующим примером, в котором в силу его "простоты" можно не использовать индексы. Пусть требуется найти все частные производные для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, значения которых для конкретной пары аргументов x и у находятся из системы уравнений $\begin{cases} F(u,v,x,y) = 0, \\ G(u,v,x,y) = 0 \end{cases}$ или, более точно, $\begin{cases} F(u(x,y), v(x,y), x, y) = 0, \\ G(u(x,y), v(x,y), x, y) = 0. \end{cases}$ (3)

Применив формулу (2), т.е. продифференцировав последовательно по x и у каждое из уравнений системы (3), получим две системы уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial G}{\partial x} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial G}{\partial y}. \end{cases} \tag{4}$$

Предположим, что при фиксированных x и у величины $u, v, \dfrac{\partial F}{\partial u}, \dfrac{\partial F}{\partial v}, \dfrac{\partial G}{\partial u}, \dfrac{\partial G}{\partial v}, \dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial G}{\partial y}$ существуют. Тогда системы уравнений (4) будут линейными относительно $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$. С условием их однозначной разрешимости, следующего из теоремы Крамера, имеющего вид

Заметим также, что, несмотря на линейность и совпадения вида основных матриц в системах (4), наибольшее затруднение представляет не их решение, а их составление, которое требует предварительного решения нелинейной системы (3).

Напомним наконец, что условие локального существования и дифференцируемости функций, заданных неявно, дает теорема *о системе неявно заданных функций*.

Проиллюстрируем использование формул (1) ... (4) следующими примерами.

Пример 1. Найти частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} xe^{u+v}+2uv=1, \\ ye^{u-v}-\dfrac{u}{v+1}=2x, \end{cases}$ в точке $\{1;2\}$ для которой выполнены равенства $u(1,2)=v(1,2)=0$. (5)

Решение: В данной задаче для системы (3) имеем $\begin{cases} F(u,v,x,y)=xe^{u+v}+2uv-1, \\ G(u,v,x,y)=ye^{u-v}-\dfrac{u}{v+1}-2x. \end{cases}$

Решать систему (3) здесь не нужно, ибо легко проверяется, что (спасибо составителям задачи!) верны равенства $F(0,0,1,2)=0$ и $G(0,0,1,2)=0$.

Поэтому в точке $\{1;2\}$ в силу (5) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial u}=xe^{u+v}+2v=1e^0+0=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}=xe^{u+v}+2u=1e^0+0=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^{u+v}=1e^0=1,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}=ye^{u+v}-\frac{1}{v+1}=2e^0-\frac{1}{0+1}=1,$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}=-ye^{u-v}+\frac{u}{(v+1)^2}=-2e^0+\frac{0}{(0+1)^2}=-2,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}=-2,\quad \frac{\partial G}{\partial y}=e^{u-v}=e^0=1.$$

А системы (4) будут $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=-1\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}-2\dfrac{\partial v}{\partial x}=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}-2\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1\,. \end{cases}$ Из них, получим $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=-1,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{3},\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{3},$ что и является решением задачи.

В заключение стоит отметить, что на практике решения системы (3) обычно ищут каким-либо численным методом для конкретных значений x и у.