ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Пример 2. Найти $dz(x,y)$, если $z = u^3 + v^3 \quad u \neq v$, а функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ определяются системой уравнений $\begin{cases} u + v = x, \\ u^2 + v^2 = y. \end{cases}$. (6)

Решение: 1) Искомый дифференциал имеет вид $dz(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, поэтому задача сводится к нахождению двух частных производных, которые здесь могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

2) Производные $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2$ и $\frac{\partial z}{\partial v} = 3v^2$ находятся тривиально, а для вычисления остальных четырех придется использовать системы (3) и (4).

Нелинейная система (3) вида $\begin{cases} F(u,v,x,y) = u + v - x = 0, \\ G(u,v,x,y) = u^2 + v^2 - y = 0, \end{cases}$ несложно решается "школьными" методами, но тут удобнее составить две линейные системы (4). Проверьте самостоятельно, что они имеют следующий вид и решения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v} \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)} \end{matrix}.$$

3) Таким образом, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2\,\frac{v}{v-u} + 3v^2\,\frac{u}{u-v} = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 3u^2\,\frac{1}{2(u-v)} + 3v^2\,\frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).$$

4) Заметим, что из (6) следует, что $u + v = x$ и $uv = \frac{x^2 - y}{2}$, что позволяет искомые производные записать как функции от x и у

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3}{2}(x^2 - y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}x.$$

Поэтому окончательно получаем, что $dz(x,y) = \frac{3}{2}(y - x^2)\,dx + \frac{3}{2}x\,dy$.

5) К полученному ответу следует добавить условие, гарантирующее разрешимость системы (6). Это условие можно получить разными способами: из геометрической интерпретации системы (6) в прямоугольной системе координат Ouv или из следующих соотношений:

$$0 \le (u-v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv = y - 2\frac{x^2 - y}{2} = 2y - x^2,$$

что с учетом $u \neq v$ дает $y > \frac{x^2}{2}$.

Вполне очевидной областью применения описанного выше метода являются задачи, в которых необходимо исследование дифференциальных свойств функций, заданных неявно. Но этими задачами данная область не ограничивается.

Чтобы пояснить ситуацию, вспомним, что в курсе "Аналитическая геометрия" рассматривалась задача построения прямоугольной декартовой системы координат, в которой уравнение линии второго порядка принимало бы наиболее простой и удобный, для исследования свойств линии, вид. Доказывалось, что такие системы координат, называемые каноническими, существуют и описывался алгоритм их построения.

Аналогичные задачи возникают не только для алгебраических уравнений. Известно, что многие физические объекты и явления описываются соотношениями, в которые входят не только неизвестные функции, но и их производные, например, дифференциальными уравнениями.

Возникает естественный вопрос: можно ли за счет выбора специальной системы координат (не обязательно декартовой) упростить вид дифференциального уравнения? В курсе высшей математики имеется целое направление, называемое "Уравнения математической физики", посвященное подобным проблемам. Но для того, чтобы убедиться, что замена переменных и использование формул (3) и (4) могут оказаться полезными, достаточно рассмотреть следующий

Пример 3. Найти все функции $u(x,y)$, удовлетворяющие во внутренности правой декартовой координатной полуплоскости, уравнению вида $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$. (7)

Решение: 1) Преобразуем уравнение (7), перейдя в полярную систему координат, то есть, сделав замену переменных $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$, обратная к которой $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$. Заметим, что данные формулы корректны, поскольку по условию $x>0$.

2) Формулы, выражающие декартовы переменные через полярные (и наоборот) у нас есть. Нужно получить в полярных координатах формулы для $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Имеем по правилу (2) дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Составим системы (4) с $F(r,\varphi,x,y)=r\cos\varphi-x$ и $G(r,\varphi,x,y)=r\sin\varphi-y$ для производных по x и y и решим их:

$$\begin{cases} \cos\varphi\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+r(-\sin\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=1, \\ \sin\varphi\dfrac{\partial r}{\partial x}+r\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\varphi \\ &\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{r}\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y}+r(-\sin\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \\ \sin\varphi\dfrac{\partial r}{\partial y}+r\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x}=\sin\varphi \\ &\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{r}\cos\varphi \end{aligned} .$$

3) Подставляем найденные выражения в полярных координатах в левую часть уравнения (7), получаем

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=r\cos\varphi[\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}(-\frac{\sin\varphi}{r})]+r\sin\varphi[\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}]=$$

$$=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\frac{\partial u}{\partial r}+(-\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi}=r\frac{\partial u}{\partial r}.$$

4) В итоге исходное уравнение, учетом условия $x>0$, будет равносильно уравнению $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}$, которое проще исходного.

Решение данного уравнения означает, что мы должны найти все непрерывно дифференцируемые функции $u(r,\varphi)$, частная производная от которых по r равна $\frac{1}{r}$. Исходя из известных правил дифференцирования, можно заключить, что $u(r,\varphi)=\ln r+C(\varphi)$, где $C(\varphi)$, есть непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента φ.

5) Решение исходной задачи получаем, сделав обратный переход к переменным: $u(r,\varphi)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+C(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})$, а, учитывая условие $x>0$ и непрерывность суперпозиции непрерывных функций, эту формулу можно записать в виде:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+D\left(\frac{y}{x}\right),$$

где $D(s)$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента.