Семинарское занятие по теме
"СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ"

Умнов А.Е.

Определение

Пусть линейный оператор $\hat{A}$, действует в линейном пространстве L и имеет значения в этом же пространстве. Иначе говоря, образы и прообразы для $\hat{A}$ принадлежат L, т.е. $\hat{A}$ есть линейное преобразование пространства L. Тогда

> *Собственным вектором* линейного оператора (преобразования) $\hat{A}$, отвечающему *собственному значению* λ, называется ненулевой элемент $f \in L$ такой, что $\hat{A} f = \lambda f$. (1)

Итак, f это ненулевой элемент пространства L, образ которого при действии на него $\hat{A}$, есть произведение числа λ (вообще говоря, комплексного) на этот же элемент f.

В общем случае универсальных способов описания или нахождения собственных векторов и собственных значений не имеется. Приходится использовать свойства конкретного линейного пространства и линейного преобразования.

Например, для оператора дифференцирования $\hat{A} = \dfrac{d}{dx}$, действующего в линейном пространстве бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, равенство (1) принимает вид дифференциального уравнения $\dfrac{df}{dx} = \lambda f$.

Собственным векторам в этом случае является каждое не равное тождественно нулю решение этого уравнения, т.е *функция* вида $f(x) = Ce^{\lambda x} \quad \forall C \neq 0$.
Данный пример иллюстрирует тот факт, что слово "вектор" в термине "собственный вектор" есть лишь дань исторически сложившейся традиции. Собственное значение в данном примере есть любое комплексное число.

Здесь стоит упомянуть о важных свойствах собственных векторов, вытекающих исключительно из определения (1):

> 1) совокупность *всех* собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению (и дополненная нулевым элементом) является *инвариантным подпространством* преобразования $\hat{A}$, называемого *собственным* подпространством;
> 2) собственные векторы отвечающие *различным* собственным значениям, *линейно независимы.*

Случай конечномерного пространства

Хотя универсального "рецепта" нахождения собственных векторов нет, приятным исключением оказывается случай, когда пространство $L = L^n$ конечномерное, т.е. в нем существует базис.

Напомним важные теоремы о свойствах конечномерного пространства:

1) каждый элемент в L^n (в конкретном базисе) полностью и однозначно описывается своим координатным столбцом, в том числе, верно: $a = b \quad \Leftrightarrow \quad \| a \| = \| b \|$;
2) операции с элементами L^n в координатном представлении выполняются по правилам действий с матрицами, для нас важно, что $\| \lambda f \| = \lambda \| f \|$;
3) каждое линейное преобразование $\hat{A}$, имеет координатное представление в виде $\| \hat{A} \|$ − квадратной матрицы n-го порядка, столбцами которой являются координатные столбцы *образов базисных векторов*.
4) для координатного представления образа любого элемента $x \in L^n$, т.е. $\| \hat{A} x \|$, верно равенство $\| \hat{A} x \| = \| \hat{A} \| \| x \|$.

Это позволяет условие (1) записать в виде:

$$\| \hat{A} \| \| f \| = \lambda \| f \| \quad , \qquad \| \hat{A} \| \| f \| - \lambda \| \hat{E} \| \| f \| = \| o \| \quad \text{или же, как} \quad \| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \| f \| = \| o \| \,, \qquad (2)$$

где $\hat{E}$ − единичный (тождественный) оператор, а $\| o \|$ − нулевой столбец, т.е. координатное представление нулевого элемента $o \in L^n$.

Рассмотрим теперь (2) в развернутом виде. Пусть $\| \hat{A} \| = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$ и $\| f \| = \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{Vmatrix}$.

Тогда равенство (2) запишется так:

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\, \phi_1 \; + \alpha_{12} \phi_2 + \ldots + \alpha_{1n} \phi_n = 0, \\ \alpha_{21}\, \phi_1 + (\alpha_{22} - \lambda) \phi_2 + \ldots + \alpha_{2n} \phi_n = 0, \\ \qquad \dots \\ \alpha_{n1}\, \phi_1 + \alpha_{n2} \phi_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda)\, \phi_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) состоит из n нелинейных уравнений с $n+1$ неизвестным, но для ее решения можно применить алгоритм, использующий специфику вида этой системы.

Заметим, что, если в (3) неизвестную λ принять за *параметр* (мы, как бы считаем λ известной, но могущей иметь разные значения, величиной), то относительно компонент столбца $\| f \|$ система (3) оказывается *линейной и однородной*, с основной квадратной матрицей $\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \|$ порядка n.

Из теоремы Крамера следует, что при λ, удовлетворяющих условию $\det \| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \neq 0$ решение системы (3) существует и единственно. С другой стороны, очевидно, что (3) имеет решение $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_n = 0$, которое не может быть решением исходной задачи, поскольку собственный вектор *ненулевой по определению*.

Рассмотрим остающийся случай $\det \| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| = 0$. Тут теорема Крамера нам ничем помочь не может, поэтому воспользуемся теоремой о том, что линейная однородная система (3) может иметь не более, чем $n - r$ линейно независимых (а. значит, ненулевых) частных решений, где r − ранг ее основной матрицы.

Для того, чтобы собственные векторы существовали, в нашем случае необходимо выполнение неравенства $n - r \geq 1$. Т.е. нам нужно, чтобы $\operatorname{rg} \| \hat{A} - \lambda \hat{E} \| \leq n - 1$.

Ранг квадратной матрицы порядка n не может быть больше, чем n, и поэтому данное условие выполнится, если $\det\| \hat{A}-\lambda\hat{E} \|=0$, поскольку матрица $\| \hat{A}-\lambda\hat{E} \|$ имеет единственный минор n-го порядка, равный ее детерминанту.

Окончательно заключаем, что, выбрав λ так, чтобы

$$\det\| \hat{A}-\lambda\hat{E} \|=0 \quad , \tag{4}$$

мы обеспечиваем существование ненулевого (по компонентам столбца $\| f \|$) решения системы (3). Значит,

> в любом конечномерном пространстве задача отыскания собственных векторов и собственных значений сводится к решению уравнения (4) и последовательному (для *каждого* найденного λ) решению системы (3).

В конечномерном линейном пространстве L^n собственные векторы и собственные значения линейного преобразования $\hat{A}$ обладают следующими свойствами.

1) Уравнение (4) есть алгебраическое уравнение n-го порядка, вид и решения которого не зависят от выбора базиса в L^n. Это уравнение принято называть *характеристическим.*
2) В комплексном линейном пространстве L^n каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет хотя бы один собственный вектор;
3) В вещественном линейном пространстве L^n каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство;
4) Размерность собственного подпространства, отвечающего решению характеристическому уравнения (собственному значению) кратности k, не меньше, чем 1 и не больше, чем k.
5) Матрица линейного преобразования $\hat{A}$ в базисе из собственных векторов этого преобразования (в случае, когда такой базис существует) имеет диагональный вид, причем на ее главной диагонали расположены собственные значения $\hat{A}$.

Примеры решения задач

Пример 1.

Найти в L^2 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе $\| \hat{A} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение.

1) Характеристическое уравнение (4) имеет вид: $\det\begin{Vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{Vmatrix}=0$ или $(\lambda-1)^2=0$.

Значит, у данного преобразования одно собственное значение $\lambda_{1,2}=1$ кратности $k=2$.

2) Для $\lambda = 1$ составим систему (3):

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \cdot \phi_1 + 1 \cdot \phi_2 = 0, \\ 0 \cdot \phi_1 + 0 \cdot \phi_2 = 0 \end{cases}, \ \text{откуда} \quad \| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Собственным вектором в рассматриваемой задаче является *любой* элемент L^2 с координатным представлением вида $C\| f_{(1)} \|$, где $C \neq 0$. Одномерным собственным подпространством будет линейная оболочка элемента $f_{(1)}$.

Пример 2.

Найти в L^3 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе $\| \hat{A} \| = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение.

1. Решим задачу, предположив сначала, что L^3 *комплексное* линейное пространство.

1) Составим характеристическое уравнение (4)

$$\det \begin{Vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0, \text{ по правилу "треугольников"} \quad -(\lambda-1)^2(\lambda+1) + 4(\lambda-1) = 0.$$

или окончательно $(\lambda-1)(\lambda^2+3) = 0$. Его решениями будут числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{3}$.
Это − собственные значения $\hat{A}$.

2) Найдем, соответствующие этим собственным значениям, собственные векторы, последовательно решая систему (3). Для $\lambda_1 = 1$ эта система будет:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \text{ а учитывая, что ранг ее матрицы 2, имеем } \begin{cases} \phi_1 - 2\phi_2 - 2\phi_3 = 0, \\ \phi_2 = 0. \end{cases}.$$

Тогда в качестве собственного вектора можно взять $\| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$.

3) Поскольку условие задачи имеет вещественную форму собственные значения λ_2 и λ_3 комплексно сопряженные. По этой же причине (*есть такая теорема*) будут комплексно сопряженными и соответствующие собственные векторы. Поэтому для их нахождения достаточно решить систему (3) только с $\lambda_2 = i\sqrt{3}$.

В этом случае система (3) имеет вид:

$$\begin{cases}(1-i\sqrt{3})\,\phi_1-2\phi_2 & =0,\\ \phi_2+(1-i\sqrt{3})\,\phi_3 & =0.\end{cases}$$

Конечно, эту систему можно решать методом исключения, однако удобнее просто принять, что $\phi_2=1-i\sqrt{3}$. Тогда очевидно, что $\phi_1=2$ и $\phi_3=-1$. В итоге получаем собственные векторы

$$\|f_{(2)}\|=\left\|\begin{matrix}2\\1-i\sqrt{3}\\-1\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \|f_{(3)}\|=\left\|\begin{matrix}2\\1+i\sqrt{3}\\-1\end{matrix}\right\|.$$

Причем здесь $\|f_{(3)}\|$. получается из $\|f_{(2)}\|$. комплексным сопряжением.

2. Решим теперь задачу, предполагая, что L^3 *вещественное* линейное пространство.

В этом случае, выполнив выкладки как в 2), получим, что $\hat{A}$ имеет только одно собственное значение $\lambda_1=1$ и, соответствующее ему, одномерное собственное подпространство, являющееся линейной оболочкой элемента $\|f_{(1)}\|=\left\|\begin{matrix}2\\0\\1\end{matrix}\right\|$.

По свойству 3) линейного оператора в вещественном линейном конечномерном пространстве

каждое линейное преобразование $\hat{A}$ имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.

Имеется теорема, о том, что таким инвариантным пространством является *линейная оболочка* $\mathrm{Re}\|f_{(2)}\|=\mathrm{Re}\left\|\begin{matrix}2\\1-i\sqrt{3}\\-1\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}2\\1\\-1\end{matrix}\right\|$ и $\mathrm{Im}\|f_{(2)}\|=\mathrm{Im}\left\|\begin{matrix}2\\1-i\sqrt{3}\\-1\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0\\-\sqrt{3}\\0\end{matrix}\right\|$ – вещественных элементов в L^3. Причем элементы $\mathrm{Re}\|f_{(2)}\|$ и $\mathrm{Im}\|f_{(2)}\|$ линейно независимые (*и такая теорема имеется*).

Итак, в рассматриваемой задаче линейное преобразование $\hat{A}$ имеет инвариантное подпространство

$$\left\|\begin{matrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{matrix}\right\|=C_1\left\|\begin{matrix}2\\1\\-1\end{matrix}\right\|+C_2\left\|\begin{matrix}0\\\sqrt{3}\\0\end{matrix}\right\| \quad \forall C_1,C_2\in\mathbf{R}.$$

Пример 3.

Найти в вещественном L^3 собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе $\|\hat{A}\|=\left\|\begin{matrix}-1&0&0\\1&0&0\\1&1&-1\end{matrix}\right\|$.

Решение.

1) Составляем и решаем характеристическое уравнение (4)

$$\det\begin{Vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{Vmatrix} = 0,$$

раскладывая по первой строке, получаем $(-1-\lambda)\cdot\det\begin{Vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{Vmatrix} = 0$ или окончательно $\lambda(\lambda+1)^2 = 0$. Откуда собственные значения суть числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1$.

2) Найдем, соответствующие этим собственным значениям, собственные векторы, последовательно решая систему (3). Для $\lambda_1 = 0$ система (3) :

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \text{или же} \quad \begin{cases} \phi_1 = 0, \\ \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 = 0. \end{cases}$$

В качестве собственного вектора здесь можно взять $\begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$

3) Поскольку собственное значение -1 имеет кратность 2, то соответствующее ему собственное подпространство может оказаться как одномерным, так и двумерным.

Составляем систему (3) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ или, что то же, $\{\ \phi_2 - \phi_3 = 0.$ Для этой системы $n = 3$, а ранг ее основной матрицы равен 1. Следовательно, эта система будет иметь два линейно независимых (а, значит, и ненулевых) частных решения.

Принимая ϕ_2 за основную переменную, а ϕ_1 и ϕ_3 за свободные, находим эти решения

$$\| f_{(2)} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \| f_{(3)} \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что эти собственные векторы могут служить базисом в собственном подпространстве преобразования $\hat{A}$, отвечающему собственному значению $\lambda = -1$.

Пример 4.

В линейном пространстве квадратных матриц найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, ставящего в соответствие каждой такой матрице результат ее умножения справа на матрицу $\begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix}$.

Решение.

1) Предварительно напомним, что данное пространство линейное конечномерное, размерности 4. Далее, результатом умножения любой квадратной матрицы 2-го порядка на любую фиксированную квадратную матрицу этого же порядка является опять же квадратная матрица 2-го порядка. Поэтому оператор $\hat{A}$ является преобразованием. (В качестве небольшого упражнения покажите, что это преобразование линейное.)

Таким образом, для нахождения собственных векторов и собственных оказывается возможным использование алгоритма, основанного на решении уравнения (4) и системы уравнений (3).

Для использования этого алгоритма требуется знать матрицу преобразования, которая, в свою очередь, зависит от базиса. Поскольку в условии задачи базис не задан, мы можем выбрать его, исходя из собственных предпочтений.

Напомним, что в 4-х мерном базисом может служить любой упорядоченный набор четырех линейно независимых элементов. Поскольку мы рассматриваем линейное пространство матриц размера 2×2, то этот набор может иметь вид:

$$\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \ \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; \ \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}.$$

Из очевидного равенства

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{Vmatrix} = \alpha_1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_3 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \alpha_4 \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

следует, что координатным представлением каждой матрицы такого вида в нашем базисе будет служить 4-х компонентный столбец $\| \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \|^{\mathrm{T}}$.

Найдем теперь матрицу преобразования, указанного в условии задачи. Напомним, что матрицей линейного преобразования линейного 4-х мерного служит квадратная матрица размера 4×4, столбцы которой суть координатные представления образов базисных элементов. В нашем случае образы базисных элементов определяются так:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \text{ с координатным столбцом } \| \ -7 \ -2 \ \ 0 \ \ 0 \ \|^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \text{ с координатным столбцом } \| \ 8 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \|^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -7 & -2 \end{Vmatrix}, \text{ с координатным столбцом } \| \ 0 \ \ 0 \ -7 \ \ -2 \ \|^{\mathrm{T}}$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix}, \text{ с координатным столбцом } \| \ 0 \ \ 0 \ \ 8 \ \ 1 \ \|^{\mathrm{T}}$$

Из полученных координатных представлений образуем матрицу преобразования $\hat{A}$

$$\| \ \hat{A} \ \| = \begin{Vmatrix} -7 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix},$$

2) Теперь составляем характеристическое уравнение (4). Оно имеет вид

$$\det\begin{Vmatrix} -7-\lambda & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = 0,$$

Применив правило разложения определителя по строке и использовав формулы сокращенного умножения, получим в итоге уравнение $(\lambda+3)^4 = 0$. Это означает, что указанное в условии преобразование имеет единственное собственное значение $\lambda_{1,2,3,4} = -3$ кратности 4.

Осталось найти собственные векторы. Система (3) при $\lambda = -3$ будет такова:

$$\begin{Vmatrix} -4 & 8 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$ или, в нематричной форме, $$\begin{cases} -\phi_1 + 2\phi_2 & = 0, \\ & -\phi_3 + 2\phi_4 = 0. \end{cases}$$

Приняв ϕ_2 и ϕ_3 за основные неизвестные, а ϕ_1 и ϕ_4 за свободные, получим два линейно независимых собственных вектора

$$\| f_{(1)} \| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \| f_{(2)} \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

которые образуют базис собственного подпространства оператора $\hat{A}$.

В заключение заметим, что мы нашли не собственные векторы, а их координатные представления. Сами собственные векторы (если учесть равенство (5)) суть матрицы 2-го порядка $\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ и $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

Ради любопытства проверим, что они удовлетворяют определению (1). Верны равенства

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -6 & -3 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = -3 \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

И, действительно, левый конец этой цепочки есть результат действия оператора на собственный вектор, а правый конец − произведение собственного значения на него.