Семинарское занятие по теме
"ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ"

Умнов А.Е.

Определение

Пусть линейный оператор $\hat{A}$, действует в линейном пространстве L и имеет значения в этом же пространстве. Иначе говоря, образы и прообразы для $\hat{A}$ принадлежат L, т.е. $\hat{A}$ есть линейное преобразование пространства L. Тогда

> Множество Ω называется *инвариантным подпространством преобразования* $\hat{A}$, если $\forall x \in \Omega \to \hat{A}x \in \Omega$. (1)

Примеры решения задач

Пример 1.

Найти в L^3 все двумерные инвариантные подпространства линейного преобразования $\hat{A}$, для которого в стандартном базисе $\| \hat{A} \| = \begin{Vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$.

Решение.

1) Для линейного преобразования $\hat{A}$ координаты образов связаны с координатами прообразов равенством $\| x^* \| = \| \hat{A} \| \| x \|$, (2)

где $\| x \| = \| \xi_1 \; \xi_2 \; \xi_3 \|^{\mathrm{T}}$ и $\| x^* \| = \| \xi_1^* \; \xi_2^* \; \xi_3^* \|^{\mathrm{T}}$.

Пусть искомое подпространство задается условием $\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0$, где $| \alpha_1 | + | \alpha_2 | + | \alpha_3 | \neq 0$. Допустимость такого описания следует из того, что двумерное подпространство в L^3 можно задать при помощи однородной системы линейных уравнений с тремя неизвестными, ранг основной матрицы которой равен единице. В этом случае наша задача сводится к нахождению коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Из определения инвариантности (1) следует, что координаты образов точек искомого подпространства должны удовлетворять уравнению $\alpha_1 \xi_1^* + \alpha_2 \xi_2^* + \alpha_3 \xi_3^* = 0$. (3)

2) Матричное равенство (2) в координатах принимает форму системы равенств вида:

$$\begin{cases} \xi_1^* = -2\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3, \\ \xi_2^* = \;\; 2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3, \\ \xi_3^* = \;\; 2\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3. \end{cases} \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\alpha_1(-2\xi_1 - 4\xi_2 + 3\xi_3) + \alpha_2(2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3) + \alpha_3(2\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3) = 0,$$

а, после перегруппировки слагаемых, $\beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \beta_3\xi_3 = 0$, (5)

где

$$\begin{cases} \beta_1 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_2 = -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_3 = 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3. \end{cases} \qquad (6)$$

Заметим, что, если (3) есть уравнение, задающее искомое подпространство, то и (5) также будет его описанием. При этом, в силу однородности уравнений (3) и (5), коэффициенты в этих уравнениях могут отличаться на один и тот же постоянный множитель. Иначе говоря, $\exists k: \quad \beta_1 = k\alpha_1; \; \beta_2 = k\alpha_2; \; \beta_3 = k\alpha_3$.

Если эти равенства подставить в (6), то мы получим условия, задающие искомые коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, следующего вида:

$$\begin{cases} k\alpha_1 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ k\alpha_2 = -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ k\alpha_3 = 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (-2-k)\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + (4-k)\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + (-1-k)\alpha_3 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Рассматривая (7) как однородную систему линейных уравнений с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, нетрудно заметить, что условие существования у (7) ненулевых решений (вытекающее из ограничения $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq 0$) имеет вид

$$\det\begin{Vmatrix} -k-2 & 2 & 2 \\ -4 & -k+4 & 2 \\ 3 & -3 & -k-1 \end{Vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad k(k+1)(k-2) = 0,$$

т.е. ненулевые решения у системы (7) будут лишь при $k = 0, k = -1$ или $k = 2$.

3) Решая последовательно систему (7) при этих конкретных k, мы получим

$$\text{при } k = 0 \; \begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Vmatrix} = C\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \forall C \neq 0;$$

$$\text{при } k = -1 \; \begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Vmatrix} = C\begin{Vmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \forall C \neq 0;$$

$$\text{при } k = 2 \; \begin{cases} -4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Vmatrix} = C\begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \quad \forall C \neq 0;$$

Используя найденные варианты для коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, приходим к заключению, что линейное преобразование имеет три двумерных инвариантных подпространства, задаваемых уравнениями:

$$\xi_1 + \xi_2 = 0; \quad 2\xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0; \quad \xi_2 - \xi_3 = 0.$$

4) Решение задачи нами получено, однако при внимательном анализе возникает следующий вопрос. Если (3) - это уравнение образа подпространства $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 = 0$, то (7) -это уравнение прообраза для этого образа. Что в этом случае означают равенства $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$? Ведь в этом случае получается, что *любая* точка в L^3 имеет своим образом точку в подпространстве $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

Дело в том, что подпространство $\xi_1 + \xi_2 = 0$ есть область значений преобразования $\hat{A}$. (Проверьте это самостоятельно, используя, например, теорему Кронекера-Капелли.) В том числе и все точки из подпространства $\xi_1 + \xi_2 = 0$ имеют свои образы в этом же подпространстве. Значит оно инвариантное.