Действия с линейными операторами

Если для линейных операторов, действующих в некотором линейном пространстве, подходящим образом ввести операции сравнения, сложения и умножения на число, то их множество будет также линейным пространством.

По определению:

Линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются *равными* (что обозначается как $\hat{A} = \hat{B}$), если $\forall x \in \Lambda : \quad \hat{A}x = \hat{B}x$.

Суммой линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{C}$, обозначаемый $\hat{A} + \hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}x + \hat{B}x$.

Произведением числа λ на линейный оператор $\hat{A}$ называется оператор, обозначаемый $\lambda\hat{A}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\lambda(\hat{A}x)$.

Нулевым оператором $\hat{O}$ называется оператор, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие нулевой элемент этого линейного пространства.

Справедливы утверждения (теоремы):

Сумма двух линейных операторов, также как и произведение числа на линейный оператор, является *линейным* оператором.

Множество *всех* линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ, является *линейным* пространством.

Также по определению:

Произведением (*композицией или суперпозицией*) линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор, обозначаемый $\hat{A}\hat{B}$, ставящий каждому элементу x линейного пространства Λ в соответствие элемент $\hat{A}(\hat{B}x)$.

Оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ называется *коммутатором* операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Справедливы утверждения:

Произведение линейных операторов является *линейным* оператором, для которого справедливы соотношения

$$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C} \ ; \quad \hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C} \ ; \quad (\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}.$$

Причем произведение линейных операторов, вообще говоря, *некоммутативно,* то есть $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq \hat{O}$.

Пример 1: В линейном пространстве алгебраических многочленов $P_n(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k$ найти коммутатор для операторов: $\hat{A}$, ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и $\hat{B}$ – оператора умножения многочлена на независимую переменную.

Решение:

Построим оператор $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем

$$\hat{A}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}P_n(\tau)=\frac{d}{d\tau}(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k)=\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^{k-1},$$

$$\hat{B}P_n(\tau)=\tau\,(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1}.$$

Откуда получаем

$$\hat{B}(\hat{A}P_n(\tau))=\tau\,(\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^{k-1})=\sum_{k=1}^{n}k\,\alpha_k\tau^k=\sum_{k=0}^{n}k\,\alpha_k\tau^k,\quad \hat{A}(\hat{B}P_n(\tau))=\frac{d}{d\tau}(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^{k+1})=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k,$$

$$(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})P_n(\tau)=(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha_k\tau^k)-(\sum_{k=0}^{n}k\,\alpha_k\tau^k)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\tau^k=P_n(\tau).$$

Следовательно, линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не коммутируют.

В рассмотренном выше примере 1 оказалось, что действие оператора $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Введем для такого оператора специальное наименование.

Оператор $\hat{E}$ называется *единичным* (или *тождественным*) оператором, если каждому элементу x линейного пространства Λ он ставит в соответствие тот же самый элемент, то есть $\hat{E}x=x \quad \forall x\in\Lambda$.

Оператор $\hat{B}$ называется *обратным оператором* для линейного оператора $\hat{A}$ (что обозначается как $\hat{A}^{-1}$), если $\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}=\hat{E}$ или же $\hat{A}\hat{A}^{-1}=\hat{A}^{-1}\hat{A}=\hat{E}$.

Классификация и свойства линейных операторов

В тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, принято говорить об *отображении*.

На практике часто используется понятие *взаимно однозначного* отображения, называемого иногда *биекцией*. Кроме того, для отображений также выделяются специальные случаи так называемых *инъективных* и *сюръективных* отображений.

Конкретно по определению:

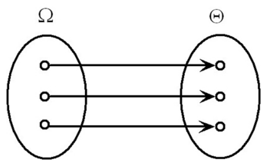
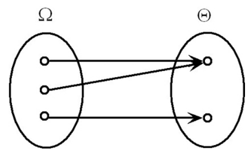
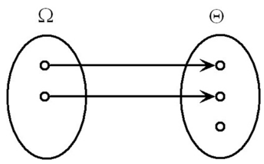
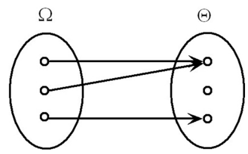
Отображение $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$ вытекает $x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega$.

Отображение $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω на множество Θ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω.

В случае инъекции множество всех значений оператора $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ может не совпадать с Θ. В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω, но, вообще говоря, он не единственен. Отображение, являющееся одновременно инъективным и сюръективным, есть биекция.

В следующей таблице приведены примеры отображений различных типов.

Примеры отображений различных типов

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюръективное		
Несюръективное		

Напомним определение:

Матрица размера $m \times n$, столбцы которой образованы компонентами элементов $\hat{A}g_i$:

$$\| \hat{A} \|_{fg} = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

называется *матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ в базисах $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \in \Lambda^n$ и $\{f_1, f_2, ..., f_m\} \in \Lambda^m$. При этом действие оператора $y = \hat{A}x$ дается формулой: $\| y \|_f = \| \hat{A} \|_{fg} \| x \|_g$.

Для *конечномерных* линейных пространств справедливы теоремы:

1) Ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов.
2) Размерность линейного пространства линейных отображений вида $\Lambda^n \to \Lambda^m$ равна $m \times n$.
3) Пусть в Λ^n используется базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Тогда действия с линейными операторами в *координатной* форме выполняются по правилам, подобным выполнению этих действий с *матрицами*. Иначе говоря, верны равенства:

$$\hat{A} = \hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \| \hat{A} \|_g = \| \hat{B} \|_g$$

$$\| \hat{A} + \hat{B} \|_g = \| \hat{A} \|_g + \| \hat{B} \|_g$$

$$\| \lambda \hat{A} \|_g = \lambda \| \hat{A} \|_g$$

$$\| \hat{A}\hat{B} \|_g = \| \hat{A} \|_g \| \hat{B} \|_g$$

$$\| \hat{A}^{-1} \|_g = \| \hat{A} \|_g^{-1}.$$

Выясним теперь, как меняется $\| \hat{A} \|_{fg}$ – матрица линейного отображения $\hat{A} : \Lambda^n \to \Lambda^m$ при замене базисов. Пусть в Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$, связанные матрицей перехода $\| G \|$, а в Λ^m – два базиса $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ и $\{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ с матрицей перехода $\| F \|$.

В этом случае оказывается справедливой теорема

матрица линейного оператора $\|\hat{A}\|_{f'g'}$ в базисах $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ и в $\{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ связана с матрицей этого же оператора $\|\hat{A}\|_{fg}$ в базисах $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ и $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ соотношением $\| \hat{A} \|_{f'g'} = \| F \|^{-1} \| \hat{A} \|_{fg} \| G \|$,

у которой имеется следствия:

1) матрица линейного преобразования при переходе от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$ в Λ^n изменяется по правилу $\| \hat{A} \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|$.

\

2) Определитель матрицы линейного *преобразования* не зависит от выбора базиса в Λ^n.

Последнее следствие вытекает из равенства

$$\det \| \hat{A} \|_{g'} = \det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|) = (\det \| S \|^{-1})(\det \| \hat{A} \|_g)(\det \| S \|) = \det \| \hat{A} \|_g ,$$

верного в силу $\det\|S\|^{-1} = \dfrac{1}{\det\|S\|}$, если $\det \| S \| \neq 0$,

В заключение рассмотрим простой, но важный для практики частный случай линейного отображения вида $\hat{A}:\{\Lambda \xrightarrow{\hat{A}} \Lambda^1\}$. Здесь результат действия $\hat{A}$ на элемент $x \in \Lambda$ естественно обозначить функционально, как $f(x)$, т.е. $\hat{A}x = f(x)$.
Такого вида зависимость называют *линейной функцией*, *линейным функционалом* или *линейной формой*, поскольку при этом множество значений *числовое*.

Важно помнить, что в конечномерном случае, т.е. при $\Lambda = \Lambda^n$, матрица преобразования $\hat{A}$ имеет, в силу формулы (1), размер $1 \times n$, т.е. является $n-$ компонентной строкой. Это вытекает из нашего (сделанного ранее) выбора $n-$ компонентного столбца как координатного представления элемента пространства .

Формула для нахождения значений линейной формы $f(x) \in \mathbf{R}$ $x \in \Lambda^n$ в Λ^n является обычной линейной функцией от n числовых переменных. Действительно, пусть в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \in \Lambda^n$ координатный столбец $\| x \|_g = \| \ \xi_1 \ \xi_2 \ \dots \xi_n \ \|^{\mathrm{T}}$, а значения формы на базисных элементах $\phi_k = f(g_k) \ k = [1, n]$, что дает $\| \hat{A} \|_g = \| f \|_g = \| \ \phi_1 \ \phi_2 \ \dots \phi_n \ \|$. Тогда, опять-таки в силу (1), $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \xi_k = \| f \|_g^{\mathrm{T}} \| x \|_g$.

Пример 2: Пусть Λ^n линейное пространство алгебраических многочленов $x = P_4(\tau) = \xi_1 + \xi_2 \tau + \xi_3 \tau^2 + \xi_4 \tau^3$ степени не выше, чем 3, с базисом вида $\{ \ g_1(\tau) = 1, g_2(\tau) = \tau, g_3(\tau) = \tau^2, g_4(\tau) = \tau^3 \}$, а линейная форма есть определенный интеграл от многочлена в пределах от 0 до 1. Найти координатное представление этой формы в данном базисе.

Решение: в нашем случае $f(x) = \int_0^1 P_4(\tau) \, d\tau$, а искомое координатное представление есть четырех компонентная строка вида

$$\| f \|_g = \| \ f(P_4(g_1(\tau))) \ \ f(P_4(g_2(\tau))) \ \ f(P_4(g_3(\tau))) \ \ f(P_4(g_4(\tau))) \ \|.$$

Конкретно

$$f(P_4(g_1(\tau))) = \int_0^1 1 \cdot d\tau = 1 ,$$

$$f(P_4(g_2(\tau))) = \int_0^1 \tau \, d\tau = \frac{1}{2} ,$$

$$f(P_4(g_2(\tau))) = \int_0^1 \tau^2 d\tau = \frac{1}{3} ,$$

$$f(P_4(g_2(\tau))) = \int_0^1 \tau^3 d\tau = \frac{1}{4} .$$

Откуда следует ответ задачи: $\| f \|_g = \left\| \ 1 \ \ \frac{1}{2} \ \ \frac{1}{3} \ \ \frac{1}{4} \ \right\|$.