Квадратичные формы

Билинейные формы

Исходным понятием в данной теме является *билинейная форма* [1](билинейная функция, билинейный функционал).

Определение 1. Пусть линейном пространстве Λ каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие число $B(x,y)$ так, что

1) $B(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha B(x_1,y)+\beta B(x_2,y)$
$\forall x_1,x_2,y\in\Lambda$; $\forall\alpha,\beta$,

2) $B(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha B(x,y_1)+\beta B(x,y_2)$
$\forall x,y_1,y_2\in\Lambda$; $\forall\alpha,\beta$,

тогда говорят, что в Λ задана *билинейная форма* (или *билинейная функция, функционал*).

Например, произведение двух линейных форм $F(x)$ и $G(y)$, определенных в Λ, $B(x,y)=F(x)G(y)$ есть билинейная форма.

Билинейные формы в Λ^n.

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ и билинейная форма $B(x,y)$. Найдем формулу для выражения ее значения через координаты аргументов.

Предположим, что в рассматриваемом базисе $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i g_i$ и $y=\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j g_j$, тогда, согласно определению 1, справедливы равенства

$$B(x,y)=B(\sum_{i=1}^{n}\xi_i g_i,\sum_{j=1}^{n}\eta_j g_j)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i B(g_i,\sum_{j=1}^{n}\eta_j g_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i\eta_j B(g_i,g_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\xi_i\eta_j. \qquad (1)$$

Определение 2. Числа $\beta_{ij}=B(g_i,g_j)$ называются *компонентами билинейной формы* $B(x,y)$ в базисе $\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$, а матрица $\|B\|_g=\|\beta_{ij}\|$ – *матрицей билинейной формы* в этом базисе.

Из формулы (1) следует, что в Λ^n с базисом $\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ билинейная форма может быть представлена в матричном виде:

$$B(x,y)=\begin{Vmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \dots\\ \eta_n\end{Vmatrix}=\|x\|_g^{\mathrm{T}}\|B\|_g\|y\|_g,$$

где столбцы $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ – координатные представления элементов x и y в данном базисе.

---

[1] Понятие билинейной формы используется, например, в формулировке третьей аксиомы квантовой механики.

Матрица билинейной формы зависит от выбора базиса. Правило изменения этой матрицы при замене базиса имеет вид $\| B \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| B \|_g \| S \|$,

где $\| S \|$ – матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, ..., g'_n\}$.

Определение 2. Билинейная форма $B(x,y)$ называется *симметричной*, если $\forall x, y \in \Lambda$ $B(x,y) = B(y,x)$.

Для симметричности билинейной формы в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы ее матрица была симметрической.

Квадратичные формы

Определение 3. Пусть в линейном пространстве Λ каждому элементу x поставлено в соответствие число $\Phi(x) = B(x,x)$, где $B(x,y)$ – некоторая билинейная форма в Λ, тогда говорят, что в Λ задана *квадратичная форма* (или *квадратичная функция, квадратичный функционал*).

В общем случае в вещественном линейном пространстве по заданной квадратичной форме $\Phi(x)$ нельзя восстановить порождающую ее билинейную форму $B(x,y)$, однако это можно сделать в случае *симметричной* билинейной формы.

Действительно, пусть квадратичная форма $\Phi(x)$ порождена симметричной билинейной формой $B(x,y)$, тогда $\forall x, y \in \Lambda$ имеет место равенство

$$\Phi(x+y) = B(x+y, x+y) = B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) = \Phi(x) + 2B(x,y) + \Phi(y),$$

откуда $B(x,y) = \dfrac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)}{2}$.

Используя данную формулу, можно дать

Определение 4. В Λ^n матрица билинейной формы $\frac{1}{2}\big(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)\big)$ называется *матрицей квадратичной формы* $\Phi(x)$.

В силу этого определения матрица *любой* квадратичной формы *симметрическая*.

Если в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, то квадратичная форма может быть записана в виде

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}\xi_k\xi_i = \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{matrix} \right\| = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| x \|_g,$$

где $\|x\|_g$ – координатный столбец элемента $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ в данном базисе. Замена базиса, в свою очередь, приводит к изменению матрицы квадратичного функционала по формуле $\| \Phi \|_{g'} = \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \|$.

Отметим, что иногда целесообразно строить квадратичную форму $\Phi(x)$ по порождающей билинейной форме, просимметрировав предварительно последнюю. Действительно, для любой $B(x,y)$ можно указать симметричную билинейную форму $B^*(x,y)$, которая будет порождать *ту же самую* квадратичную форму $\Phi(x)$, что и $B(x,y)$. Например, возьмем $B^*(x,y)=\frac{1}{2}(B(x,y)+B(y,x))$. Для такой билинейной формы очевидно, что

$$\varphi_{ij}=\frac{\beta_{ij}+\beta_{ji}}{2}=\frac{\beta_{ji}+\beta_{ij}}{2}=\varphi_{ji}\quad\forall i,j=[1,n],\tag{2}$$

т.е. числа φ_{ij} суть элементы симметрической матрицы, являющейся по определению 4 матрицей квадратичной формы $\Phi(x)=B^*(x,x)$.

Пример 1. Пусть в Λ^3 задана билинейная (несимметричная!) форма

$$B_1(x,y)=\xi_1\eta_1+3\xi_2\eta_2-\xi_2\eta_1-3\xi_1\eta_2+2\xi_3\eta_1-\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2=$$
$$=\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1 & -3 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{matrix}\right\|.$$

Порождаемая ей в Λ^3 квадратичная форма в силу формулы (2) будет иметь вид

$$\Phi_1(x)==\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{matrix}\right\|=\xi_1^2+3\xi_2^2-4\xi_1\xi_2+2\xi_1\xi_3-2\xi_2\xi_3.$$

В то же время симметричная билинейная форма

$$B_1^*(x,y)=\xi_1\eta_1+3\xi_2\eta_2-2\xi_1\eta_2-2\xi_2\eta_1+\xi_1\eta_3+\xi_3\eta_1-\xi_2\eta_3-\xi_3\eta_2=$$
$$=\left\|\begin{matrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{matrix}\right\|,$$

имеющая матрицу $\left\|\begin{matrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{matrix}\right\|$, будет порождать в Λ^3 ту же самую квадратичную форму $\Phi_1(x)=\xi_1^2+3\xi_2^2-4\xi_1\xi_2+2\xi_1\xi_3-2\xi_2\xi_3$.

Метод Лагранжа

Как уже отмечалось, квадратичная форма в Λ^n полностью и однозначно описывается своей матрицей $\|\Phi\|_g$ в выбранном базисе.

При этом в разных базисах матрица квадратичной формы, вообще говоря, различная. Правило изменения этой матрицы при замене базиса имеет вид $\|\Phi\|_{g'}=\|S\|^{\mathrm{T}}\|\Phi\|_g\|S\|$, (3)

где $\|S\|$ – матрица перехода от базиса $\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$ к базису $\{g'_1,g'_2,\ldots,g'_n\}$.

Поэтому представляет интерес задача отыскания в Λ^n базисов, в которых квадратичная форма имеет *наиболее простой* и удобный для исследования вид.

Предварительно убедимся, что значение квадратичной формы от выбора базиса не зависит.

Пусть $\Phi(x)=\|x\|_g^{\mathrm{T}}\|\Phi\|_g\|x\|_g$ и $\Phi'(x)=\|x\|_{g'}^{\mathrm{T}}\|\Phi\|_{g'}\|x\|_{g'}$. (4)

Нам надо показать, что $\Phi'(x)=\Phi(x)$.

Действительно, с одной стороны, по формулам перехода имеем $\| x \|_g = \| S \| \| x \|_{g'}$ и, в силу правила транспонирования произведения матриц, получаем $\| x \|_g^{\mathrm{T}} = \| x \|_{g'}^{\mathrm{T}} \| S \|^{\mathrm{T}}$.

С другой стороны, матрица перехода $\| S \|$ невырожденная, поэтому имеет обратную матрицу $\| S \|^{-1}$. Аналогично для матрицы $\| S \|^{\mathrm{T}}$ существует $\left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{-1}$ и будут верны равенства $\| x \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| x \|_g$ и $\| x \|_{g'}^{\mathrm{T}} = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{-1}$.

Подставляя в формулу (4) последние два равенства и формулу (3), получаем

$$\Phi'(x) = \| x \|_{g'}^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_{g'} \| x \|_{g'} = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \left(\| S \|^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \| S \|^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| S \| \| S \|^{-1} \| x \|_g .$$

Поскольку произведение матриц обладает свойством ассоциативности, то вычисление полученного выражения можно начинать с любой пары, рядом стоящих матриц. Это дает требуемое равенство

$$\Phi'(x) = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| E \| \| \Phi \|_g \| E \| \| x \|_g = \| x \|_g^{\mathrm{T}} \| \Phi \|_g \| x \|_g = \Phi(x),$$

в силу определений обратной и единичной матриц.

Теперь уточним понятие *наиболее простой вид матрицы*. Мы будем считать удобной для использования *диагональную* матрицу. Или же, применительно к квадратичной форме, дадим

Определение 5. Будем говорить, что квадратичная форма $\Phi(x)$ имеет *диагональный вид* в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset \Lambda^n$, если она в нем представима как

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 , \qquad (5)$$

где $\lambda_i \ \forall i = [1,n]$ – некоторые числа.

Если, кроме того, числа $\lambda_i,\ i=[1,n]$ принимают лишь значения 0 или ±1, то говорят, что квадратичная форма в данном базисе имеет *канонический* вид.

Справедливы

Теорема 1. Для любой квадратичной формы в Λ^n существует базис, в эта форма имеет канонический вид.

и

Теорема 2. Количества положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов λ_i в формуле (5) не зависит от выбора базиса.

Теорему 2 в математической литературе традиционно называют *теоремой инерции* квадратичной формы.

Задачу отыскания диагонального или канонического базисов (то есть, базисов, в которых квадратичная форма имеет соответственно диагональный или канонический вид) можно решать разными способами. Наиболее простым из них является широко используемый в элементарной математике *метод Лагранжа* (или *метод выделения полных квадратов*).

Для задач небольшой размерности реализация этого метода может быть сведена к построению последовательности линейных невырожденных замен переменных. Что иллюстрирует

`Пример 2.` В линейном пространстве Λ^3 привести к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x) = 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_1 - 2\xi_2\xi_3$ (6)
и построить для нее канонический базис.

`Решение.` Поскольку квадратичная форма в условии задана в координатном виде, то будем исходный базис считать стандартным, т.е. образованным элементами с координатными столбцами $\left\{ \| g_1 \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} , \quad \| g_2 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} , \quad \| g_3 \| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\}$. В этом базисе матрица квадратичной формы в силу (2) будет иметь вид $\| \Phi \| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$.

В формуле (6) нет полных квадратов, поэтом создадим их "искусственно" при помощи следующей замены переменных $\begin{cases} \xi_1 = \xi_1^{'} + \xi_2^{'}, \\ \xi_2 = \xi_1^{'} - \xi_2^{'}, \\ \xi_3 = \xi_3^{'}. \end{cases}$ После подстановки в (6) и упрощений получим формулу в "переменных со штрихом" вида $\Phi(x) = \xi_1^{'2} - \left(\xi_2^{'} - \xi_3^{'}\right)^2 + \xi_2^{'2}$.

Теперь делаем вторую замену, следующую из очевидных соотношений $\begin{cases} \xi_1^{"} = \xi_1^{'}, \\ \xi_2^{"} = \xi_2^{'} - \xi_2^{'}, \\ \xi_3^{"} = \xi_3^{'}. \end{cases}$ а именно $\begin{cases} \xi_1^{'} = \xi_1^{"}, \\ \xi_2^{'} = \xi_2^{"} + \xi^{'}{}_2, \\ \xi_3^{'} = \xi_3^{"}, \end{cases}$ позволяющую получить канонический вид в переменных с "двумя штрихами" $\Phi(x) = \xi_1^{"2} - \xi_2^{"2} + \xi_3^{"2}$.

Наконец, для построения канонического базиса построим формулы перехода от исходной системы переменных к канонической, выразив самые "старые" переменные (без штрихов) через самые "новые" (с двумя штрихами). Получим (проверьте это самостоятельно) $\begin{cases} \xi_1 = \xi_1^{"} + \xi_2^{"} + \xi_3^{"}, \\ \xi_2 = \xi_1^{"} - \xi_2^{"} - \xi_3^{"}, \\ \xi_3 = \xi_3^{"}. \end{cases}$ Значит, матрица перехода от исходного базиса к каноническому имеет вид $\| S \| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Она очевидно невырожденная и ее столбцами (как известно!) служат координатные столбцы базиса к которому перешли, в базисе от которого переходили.

Иначе говоря. из вида матрицы перехода получаем канонический базис

$$\left\{ \| g_1^{''} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} , \quad \| g_2^{''} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} , \quad \| g_{3''} \| = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \right\},$$

в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид

$$\| \Phi \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Замечание: базис, в котором квадратичный функционал имеет диагональный или канонический вид, не единственный, равно как не является единственным сам канонический или диагональный вид квадратичного функционала в Λ^n, однако в силу теоремы инерции, в любом диагональном или каноническом базисе формула для квадратичной формы из примера 2 будет иметь два положительных коэффициента, один отрицательный и ни одного нулевого.