Евклидово пространство

Аксиоматика и основные свойства

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия *длины*, *расстояния*, *величины угла* и других метрических характеристик. Однако их использование становится возможным, если в этом пространстве дополнительно ввести операцию, называемую *скалярным произведением*, описываемую следующими правилами.

Определение 1. Пусть в вещественном линейном пространстве каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое символом (x,y), называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

1) $(x,y)=(y,x)$;
2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;
3) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;
4) $(x,x)\ge 0$, причем $(x,x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=o$,

тогда говорят, что задано *евклидово пространство E*.

Замечание: аксиомы 1)–4) в совокупности означают, что скалярное произведение есть *форма*

- *билинейная* (что следует из аксиом 2) и 3)) ,
- *симметричная* (следует из аксиомы 1) ,
- которая порождает *положительно определенную квадратичную* (следует из аксиомы 4) *форму*.

Любая билинейная форма, обладающая данными свойствами, может быть использована в качестве скалярного произведения.

Пример 1.

1°. Пространство n-мерных столбцов $x=\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \dots\\ \xi_n\end{Vmatrix}$; $y=\begin{Vmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \dots\\ \eta_n\end{Vmatrix}$ со скалярным произведением, определяемым по формуле $(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$, есть евклидово пространство.

2°. Евклидовым будет пространство непрерывных для $\tau\in[\alpha,\beta]$ функций, со скалярным произведением
$$(x,y)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}x(\tau)y(\tau)d\tau\,. \tag{1}$$

Определение 2. В евклидовом пространстве E назовем:

1) *нормой* (или *длиной*) элемента x число $|x|=\sqrt{(x,x)}$;
2) *расстоянием* между элементами x и y число $|x-y|$.

Из аксиоматики евклидова пространства следуют неравенства:

- $\forall\, x, y \in E$ **имеет место** $|(x,y)| \le |x||y|$ *неравенство Коши-Буняковского*.
- $\forall\, x, y \in E$ **имеет место** $|x+y| \le |x| + |y|$ *неравенство треугольника*.

Заметим, что неравенства Коши–Буняковского и треугольника для евклидова пространства могут иметь довольно экзотический вид, например такой как, скажем, в примере 1-2°

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau)\, d\tau \right| \le \sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2(\tau) d\tau} \sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta} y^2(\tau) d\tau} \;, \quad \sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(x(\tau) + y(\tau) \right)^2 d\tau} \le \sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2(\tau)\, d\tau} + \sqrt{\int\limits_{\alpha}^{\beta} y^2(\tau)\, d\tau} \;.$$

Определение 2. В евклидовом пространстве E *величиной угла* между ненулевыми элементами x и y назовем число $\alpha \in [0, \pi]$, удовлетворяющее соотношению $\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x||y|}$.

В евклидовом пространстве E элементы x и y называются *ортогональными*, если $(x,y) = 0$.

Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса

В конечномерном евклидовом пространстве E^n базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ будем называть *ортонормированным*, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \ne j \end{cases} \;\; \forall i, j = [1, n]$.

Имеет место теорема утверждающая, что

во всяком евклидовом пространстве E^n существует ортонормированный базис.

Доказательство этой теоремы основано на том, что для любого набора n линейно независимых элементов можно построить совокупность попарно ортогональных элементов, каждый из которых есть линейная комбинация элементов исходного набора.

При этом оказывается, что затраты вычислительных ресурсов на выполнение ортогонализации существенно снижаются (по сравнению, скажем, с методом неопределенных коэффициентов), если применить так называемую *процедуру Грама-Шмидта*, суть которой поясним, рассмотрев

Пример 2.

Пусть в линейном пространстве алгебраических многочленов степени не выше, чем 2, т.е. вида $P(x) = \xi_1 + \xi_2 x + \xi_3 x^2$, скалярное произведение задано формулой (1) при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. То есть, мы имеем трехмерное евклидово пространство E^3.

Возьмем в этом пространстве три линейно независимых элемента, образующих стандартный базис: $\left\{ g_{(1)}(x) = 1, \quad g_{(2)}(x) = x, \quad g_{(3)}(x) = x^2 \right\}$. Эти элементы не являются попарно ортогональными, так как, например, $(g_{(1)}(x), g_{(2)}(x)) = \int\limits_0^1 1 \cdot x\, dx = \left. \dfrac{x^2}{2} \right|_0^1 = \dfrac{1}{2} \ne 0$.

Использование процедуры *Грама-Шмидта* для ортогонализации данного набора заключается в следующем[1].

[1] Для краткости далее в выкладках будем опускать независимую переменную x там, где это возможно.

За первый элемент искомого ортогонального набора $e_{(1)}$ примем первый элемент исходного набора. То есть, $e_{(1)} = g_{(1)} = 1$.

Второй элемент ортогонального набора будем искать в виде линейной комбинации $e_{(2)} = g_{(2)} + \lambda_{2,1}\, e_{(1)}$, где $\lambda_{2,1}$ константа, значение которой подберем так, чтобы выполнялось условие *ортогональности* . $(e_{(2)}, e_{(1)}) = 0$. (2)

В нашем случае $e_{(2)}(x) = x + \lambda_{2,1} \cdot 1$, а условие ортогональности (2) будет

$$(e_{(2)}, e_{(1)}) = (g_{(2)} + \lambda_{2,1}\, e_{(1)}, e_{(1)}) = (g_{(2)}, e_{(1)}) + \lambda_{2,1}\,(e_{(1)}, e_{(1)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,1} = -\frac{(g_{(2)}, e_{(1)})}{(e_{(1)}, e_{(1)})} .$$

Что дает окончательно

$$(e_{(1)}, e_{(1)}) = \int_0^1 1 \cdot 1\, dx = x\Big|_0^1 = 1, \quad (g_{(2)}, e_{(1)}) = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,1} = -\frac{1}{2} .$$

Итак, $e_{(2)}(x) = x - \frac{1}{2}$.

Теперь, внимание! Основная идея метода *Грама-Шмидта*: третий элемент ортогонального набора будем искать в виде: $e_{(3)} = g_{(3)} + \lambda_{3,1}\, e_{(1)} + \lambda_{3,2}\, e_{(2)}$. (3)

Значения констант $\lambda_{3,1}$ и $\lambda_{3,1}$ подберем так, чтобы выполнялись одновременно условия ортогональности $(e_{(3)}, e_{(1)}) = 0$ и $(e_{(3)}, e_{(2)}) = 0$. (4)

Подставив формулу (3) в равенства (4) , получим

$$(e_{(3)}, e_{(1)}) = (g_{(3)} + \lambda_{3,1}\, e_{(1)} + \lambda_{3,2}\, e_{(2)}, e_{(1)}) = (g_{(3)}, e_{(1)}) + \lambda_{3,1}\,(e_{(1)}, e_{(1)}) + \lambda_{3,2}\,(e_{(2)}, e_{(1)}) = 0 ,$$
$$(e_{(3)}, e_{(2)}) = (g_{(3)} + \lambda_{3,1}\, e_{(1)} + \lambda_{3,2}\, e_{(2)}, e_{(2)}) = (g_{(3)}, e_{(2)}) + \lambda_{3,1}\,(e_{(1)}, e_{(2)}) + \lambda_{3,2}\,(e_{(2)}, e_{(2)}) = 0 .$$

Эти равенства за счет формулы (2) упрощаются до $\begin{matrix} (g_{(3)}, e_{(1)}) + \lambda_{3,1}\,(e_{(1)}, e_{(1)}) = 0 , \\ (g_{(3)}, e_{(2)}) + \lambda_{3,2}\,(e_{(2)}, e_{(2)}) = 0 \end{matrix}$ и мы получаем $\lambda_{3,1} = -\frac{(g_{(3)}, e_{(1)})}{(e_{(1)}, e_{(1)})}$ и $\lambda_{3,2} = -\frac{(g_{(3)}, e_{(2)})}{(e_{(2)}, e_{(2)})}$.

Осталось подсчитать три скалярных произведения (так как $(e_{(1)}, e_{(1)}) = 1$ найдено раньше) .

Имеем $(g_{(3)}, e_{(1)}) = \int_0^1 x^2 \cdot 1\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3,1} = -\frac{1}{3}$.

Аналогично

$$(e_{(2)}, e_{(2)}) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12} ,$$

$$(g_{(3)}, e_{(2)}) = \int_0^1 x^2 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3,2} = -1 .$$

Теперь находим из 3)

$$e_{(3)}(x) = g_{(3)}(x) + \lambda_{3,1}\, e_{(1)}(x) + \lambda_{3,2}\, e_{(2)}(x) = x^2 - \frac{1}{3} \cdot 1 - \left(x - \frac{1}{2} \right) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Ортогональная система построена.

Соответствующая ортонормированная система, очевидно, будет иметь вид

$$\left\{\ \tilde{e}_{(1)}(x)=\frac{e_{(1)}(x)}{\left|e_{(1)}(x)\right|},\qquad \tilde{e}_{(2)}(x)=\frac{e_{(2)}(x)}{\left|e_{(2)}(x)\right|},\qquad \tilde{e}_{(3)}(x)=\frac{e_{(3)}(x)}{\left|e_{(3)}(x)\right|}\ \right\},$$

поскольку $\left|\dfrac{e_{(j)}(x)}{\left|e_{(j)}(x)\right|}\right|=1\quad \forall j=1,2,3.$

Нормы элементов подсчитаем по формуле пункта 1) определения 2. Получим

$$\left|e_{(1)}(x)\right|=\sqrt{\left(e_{(1)}(x),e_{(1)}(x)\right)}=\sqrt{1}=1,\qquad \left|e_{(2)}(x)\right|=\sqrt{\left(e_{(2)}(x),e_{(2)}(x)\right)}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\left|e_{(3)}(x)\right|=\sqrt{\left(e_{(3)}(x),e_{(3)}(x)\right)}=\sqrt{\int\limits_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2dx}=\frac{\sqrt{5}}{30}.$$

В итоге, после нормировки приходим к ортонормированному базису

$$\left\{\ \tilde{e}_{(1)}(x)=1,\qquad \tilde{e}_{(2)}(x)=2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right),\qquad \tilde{e}_{(3)}(x)=6\sqrt{5}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

К найденному решению сделаем следующие замечания.

1) Метод ортогонализации Грама-Шмидта можно использовать также в случае, когда пространство E не имеет базиса, а исходный набор $\{g_{(n)}\}$ является последовательностью элементов в этом пространстве. Алгоритм остается тем же.

   Действительно, пусть мы ортогонализовали первые k элементов последовательности и получили попарно ортогональные элементы $\{e_{(1)},\ e_{(2)},\ \ldots,\ e_{(k)}\}$. Следующий ортогонализированный элемент ищем по формуле

$$e_{(k+1)}=g_{(k+1)}+\sum_{j=1}^{k}\lambda_{k+1,j}e_{(j)}\ , \tag{5}$$

   в которой каждый из коэффициентов $\lambda_{k+1,m}$ находится путем скалярного умножения обеих частей (5) на элемент $e_{(m)}$. При этом в силу $(e_{(j)},e_{(m)})=0$, если $m\neq j\ \forall m\in[1,k]$, и условия ортогональности $(e_{(k+1)},e_{(m)})=0$, получаем $\lambda_{k+1,m}=-\dfrac{(g_{(k+1)},e_{(m)})}{(e_{(m)},e_{(m)})}$.

   Здесь условие $(e_{(m)},e_{(m)})\neq 0$ следует (проверьте это самостоятельно) из предположения о линейной независимости элементов последовательности $\{g_{(n)}\}$.

2) Процесс ортогонализации Грама–Шмидта может быть также применен и к линейно зависимой системе элементов евклидова пространства. В этом случая в итоге некоторых шагов могут получаться нулевые элементы, отбрасывание которых позволяет продолжить процесс ортогонализации.

Координатное представление скалярного произведения

Полезным инструментом исследования свойств некоторого набора элементов $\{f_1,f_2,\ldots,f_k\}$ в евклидовом пространстве является *матрица Грама*.

Определение 3. В евклидовом пространстве E *матрицей Грама* системы элементов $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ называется симметрическая матрица вида

$$\|\Gamma\|_f = \begin{Vmatrix} (f_1,f_1) & (f_1,f_2) & \cdots & (f_1,f_k) \\ (f_2,f_1) & (f_2,f_2) & \cdots & (f_2,f_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_k,f_1) & (f_k,f_2) & \cdots & (f_k,f_k) \end{Vmatrix}.$$

Пусть в E^n дан базис $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Скалярное произведение элементов $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i$ и $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j$, в силу определения 1 представимо в виде

$$(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i g_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j (g_i, g_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \xi_i \eta_j,$$

где $\gamma_{ij} = (g_i, g_j)\ \forall i, j = [1, n]$ – компоненты матрицы $\|\Gamma\|_g$, называемой *базисной матрицей Грама*.

Мы ранее отмечали, что эта матрица симметрическая, в силу коммутативности скалярного произведения, и является матрицей симметричной билинейной формы, задающей скалярное произведение. Тогда, используя координатный вид билинейной формы, координатное представление скалярного произведения может быть записано так:

$$(x,y) = \|x\|_g^{\mathrm{T}} \|\Gamma\|_g \|y\|_g = \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} (g_1,g_1) & (g_1,g_2) & \dots & (g_1,g_n) \\ (g_2,g_1) & (g_2,g_2) & \dots & (g_2,g_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_n,g_1) & (g_n,g_2) & \dots & (g_n,g_n) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{Vmatrix},$$

где $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ – координатные представления (столбцы) элементов x и y в базисе $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$.

Заметим, наконец, что в ортонормированном базисе $\|\Gamma\|_e = \|E\|$, и, следовательно, формула для скалярного произведения принимает вид $(x,y) = \|x\|_g^{\mathrm{T}} \|y\|_g = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$.

Матрица Грама обладает следующими важными свойствами.

Теорема 1. **Система элементов $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ в E^n линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы положителен.**

Следствие 1. **Для базисной матрицы Грама $\|\Gamma\|_g$ в любом базисе $\det\|\Gamma\|_g > 0$.**

Теорема 2. **Система элементов $\{f_1, f_2, ..., f_k\}$ в E^n линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы равен нулю.**