ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Задачей ***математического программирования*** принято называть задачу:

максимизировать $F(x)$ *по* $x \in E^n$
при условиях: $f_i(x) \le 0 \quad i = \overline{1,m}$

или, в координатной форме,

найти максимум $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *по* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$,
при условиях:

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0, \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0, \\ \qquad \ldots \\ f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0. \end{cases}$$

ПОСТАНОВКА
ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если функции $F(x)$ и $f_i(x) \le 0 \quad i = \overline{1,m}$ линейные, то задачу математического программирования называют задачей *линейного программирования*.

В дальнейшем мы будем использовать следующую конкретную форму постановки задач линейного программирования.

$$\text{\textit{Найти максимум}} \qquad \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j \quad \text{\textit{по}} \quad \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E^n ,$$

$$\text{\textit{при условиях}:} \qquad \xi_j \ge 0 , \quad j = [1, n], \tag{1.1}$$

$$-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \le 0 , \quad i = [1, m].$$

Множество элементов x, удовлетворяющих всем ограничениям задачи (1.1), будем обозначать R.

Определение 1.1.

Принято говорить, что

- элемент $x^0 \in E^n$ *допустимым*, если на нем выполнены *все* ограничения задачи ЛП, то есть, $x^0 \in R$;

- ограничение типа "неравенство" задачи ЛП на элементе $x^0 \in E^n$ называется *активным*, если на этом x^0 данное ограничение нарушено, или выполняется как равенство;
- если задача ЛП имеет хотя бы один допустимый элемент, то задача ЛП называется *совместной.* Иначе говорят, что задача ЛП *несовместна*.

- ограниченный элемент x^* называется *решением*, если он удовлетворяет всем ограничениям, а целевой функционал имеет на нем экстремальное значение. Сама задача ЛП в этом случае называется *совместной.*

- ограниченное решение x^* задачи ЛП называется *переопределенным*, если число ограничений, активных на x^*, больше, чем размерность пространства E^n;

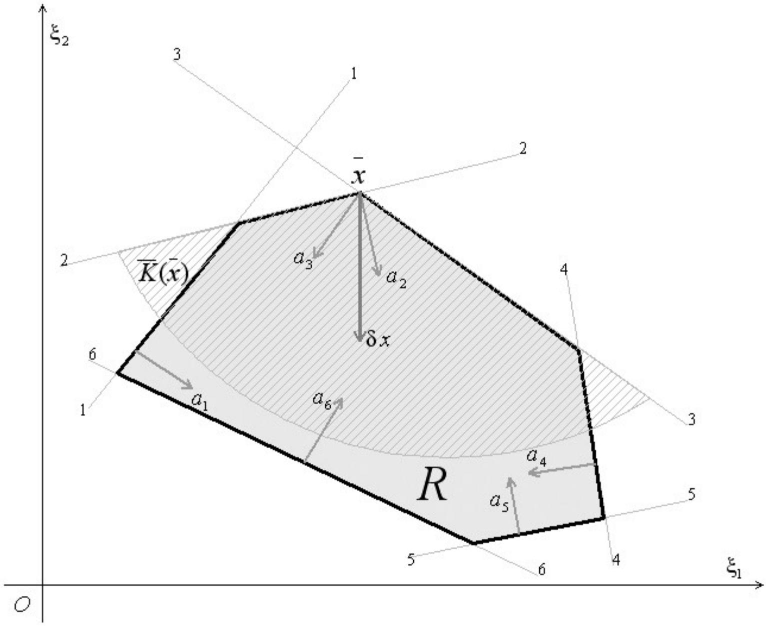


Рис. 1.1.

Для выбранного граничного элемента $\bar{x}$ (рис. 1.1) активными являются ограничения с индексами 2 и 3. Остальные ограничения на этом элементе неактивны. Множество *допустимых элементов* R отмечено серым цветом, а конус *допустимых направлений* $\overline{K}(\bar{x})$ заштрихован.

Условие *оптимальности* элемента $\bar{x}$ геометрически означает, что любая допустимая вариация δx на элементе $\bar{x}$ является в E^2 вектором, образующим не тупой угол со всеми нормальными, ориентированными внутрь R, векторами *всех активных* на $\bar{x}$ ограничениях.

Вариация δx называется *улучшающей* для элемента $\bar{x}$, если

$$F(\bar{x}+\delta x) > F(\bar{x}) .$$

Как решаются задачи линейного программирования

Проиллюстрируем применение описанной схемы для следующей задачи линейного программирования:

Найти максимум $2\xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1, 2],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$$

Приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4:

Найти максимум $2\xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,4],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$$

Пусть $\| x' \| = \| \xi_1 \quad \xi_2 \|^{\mathrm{T}}$, тогда в силу двух последних равенств и условия неотрицательности переменных,

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0 .$$

Что в свою очередь приводит к выражению для функционала

$$2\xi_1 + 3\xi_2 = 10 - \frac{4}{3}\xi_3 - \frac{1}{3}\xi_4 ,$$

из которого в силу неотрицательности ξ_3 и ξ_4 получаем, что максимальное значение функционала равно 10 на элементе $\| x^* \| = \| 2 \quad 2 \|^{\mathrm{T}}$.

В некоторых случаях процедура решения может оказаться немного более сложной. Пусть, например, требуется:

найти максимум $2\xi_1 - 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

$$\xi_i \geq 0\ , \quad j = [1, 2],$$

при условиях: $\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$$

Приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4:

Найти максимум $2\xi_1 - 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,

при условиях: $\xi_i \geq 0\ , \quad j = [1,4],$

$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$$

Пусть снова $\| x' \| = \| \xi_1 \quad \xi_2 \|^{\mathrm{T}}$, тогда мы имеем

$$\xi_1(\xi_3, \xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \ge 0 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3, \xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \ge 0.$$

Это приводит к иному выражению для целевого функционала

$$2\xi_1 - 3\xi_2 = -2 + \frac{8}{3}\xi_3 - \frac{7}{3}\xi_4 .$$

Из этой формулы, следует, что, в силу неотрицательности ξ_4, оптимальное значение ξ_4 следует выбрать нулевым, а вот значение ξ_3 нужно постараться сделать как можно большим.

Из равенств

$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4$$

вытекает, что с ростом ξ_3 значение ξ_1 неограниченно возрастает, а значение ξ_2 убывает, но не может стать отрицательным числом. Поэтому (учитывая, что $\xi_4 = 0$) мы приходим к следующему условию, определяющему максимально допустимую величину ξ_3

$$\xi_2(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 \geq 0 .$$

Откуда $\xi_3 \leq 3$. И окончательно мы приходим к заключению, что координаты оптимального элемента в E^4 для задачи и канонической форме имеют вид

$$\xi_1^* = 3 ; \quad \xi_2^* = 0 ; \quad \xi_3^* = 3 ; \quad \xi_4^* = 0 .$$

Следовательно, максимальное значение целевого функционала равно 6.

Прямая и двойственная задачи линейного программирования

Рассмотрим следующую пару задач :

***прямую* задачу**:

найти максимум $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E^n$,

при условиях:

$$\xi_j \geq 0\ ,\ j = [1, n], \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \leq \beta_i\ ,\ j = [1, m]$$

и *двойственную* ***задачу*:**

найти минимум $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i$ *на* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \in E^m$,

при условиях: (1.2)

$$\lambda_i \geq 0\ ,\ i = [1, m], \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \geq \sigma_i\ ,\ i = [1, n].$$

Основные правила, связывающие условия прямой и двойственной задач таковы:

Если в условии *прямой* задачи	**то в условии *двойственной* задачи**
Найти максимум	Найти минимум
Найти минимум	Найти максимум
Число переменных	Число ограничений
Число ограничений	Число переменных
j -ый коэффициент целевого функционала	правая часть j -го неравенства
правая часть i -го неравенства	i -ый коэффициент целевого функционала
j -ый столбец в матрице ограничений	j -ая строка в матрице ограничений
i -ая строка в матрице ограничений	i -ый столбец в матрице ограничений

Заметим, что в силу этих правил задача двойственная к двойственной является прямой задачей.

Теоремы двойственности в линейном программировании

Для каждой пары взаимодвойственных задач верна

Теорема 1.1

Если $\left\| x^* \right\| = \left\| \xi_1^* \quad \xi_2^* \quad \ldots \quad \xi_n^* \right\|^{\mathrm{T}}$ **– решение прямой задачи, а** $\left\| \Lambda^* \right\| = \left\| \lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \ldots \quad \lambda_m^* \right\|^{\mathrm{T}}$ **– решение двойственной задачи, то справедливы равенства:**

1°. ***основное соотношение двойственности***

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i^*;$$

2°. ***соотношения дополняющей нежесткости***

$$\lambda_i^* (-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j^*) = 0 \,;\; \forall i = [1, m],$$

$$\xi_j^* (-\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i^*) = 0 \,;\; \forall j = [1, n].$$

Следствие: метод "*малых вариаций*".

Пусть $F^* = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i^*$,

тогда $\dfrac{\partial F^*}{\partial \beta_i} = \lambda_i^*$.

Или, приближенно, $\lambda_i^* \approx \dfrac{\Delta F^*}{\Delta \beta_i}$.

Свойства пары взаимодвойственных задач ЛП

Основное соотношение двойственности и *условия дополняющей нежесткости* являются базовыми свойствами взаимодвойственной пары задач. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.2. **Если x^* и Λ^* допустимые элементы пары взаимодвойственных задач такие, что**

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i^* ,$$

то x^* и Λ^* – решения этих задач.

Для пары взаимодвойственных задач имеет место следующая (подтверждаемая примерами) альтернатива:

а) <u>обе задачи имеют решение:</u> ***прямая***

Найти максимум $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6$$

с решением $\xi_1^* = 2,\, \xi_2^* = 2,\, F^* = 10$

и

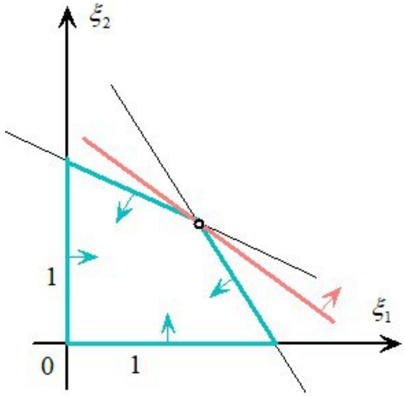
двойственная

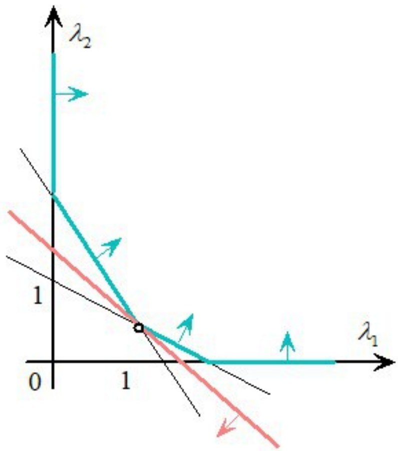
Найти минимум $G = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$ *по* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\lambda_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2,$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$$

с решением $\lambda_1^* = \frac{4}{3},\, \lambda_2^* = \frac{1}{3},\, G^* = 10.$


ξ_2
ξ_1
1
0
1


λ_2
λ_1
1
0
1

б) <u>обе задачи несовместны</u>:

найти максимум $F = \xi_1 + 3\xi_2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\begin{aligned} \xi_i &\ge 0, \quad j = [1,2], \\ \xi_1 - \xi_2 &\le 3, \\ -\xi_1 + \xi_2 &\le -4. \end{aligned}$$

и

найти минимум $G = 3\lambda_1 - 4\lambda_2$ *по* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\begin{aligned} \lambda_i &\ge 0, \quad j = [1,2], \\ \lambda_1 - \lambda_2 &\ge 1, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 &\ge 3. \end{aligned}$$

в) <u>одна задача совместна, а другая – нет:</u>

найти максимум $F = \xi_1$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1, 2],$$

$$\xi_1 - \xi_2 \leq 1,$$

с *неограниченым целевым функционалом* на множестве допустимых состояний

и

найти минимум $G = \lambda_1$ *по* $\{\lambda_1\} \in E^1$,

при условиях:

$$\lambda_1 \geq 0\,,$$

$$\lambda_1 \geq 1,$$

$$-\lambda_1 \geq 0,$$

которая *несовместна*.

Обратите внимание, что согласно определению 4.1.1 первая из задач в пункте в) решений не имеет. Этот факт обобщает

Единственность и переопределенность решений взаимодвойственных задач ЛП

Рассмотренные выше утверждения справедливы как случаев единственного, так и неединственного решения задачи ЛП.

Следующая теорема позволяет делать заключение о числе этих решений.

Теорема 1.3. **Если одна из взаимодвойственных задач имеет *единственное, переопределенное* решение, то другая задача имеет *неединственное* решение.**

Отметим также, что возможен случай, когда обе задачи взаимодвойственной пары имеют неединственное решение. Проиллюстрируем два последних утверждения примерами.

а) <u>прямая задача переопределена, а двойственная имеет неединственное решение:</u>

найти максимум $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 3$$

с решением $\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 3, F^* = 9$

В этом случае на элементе x^* активными являются ограничения

$$\xi_1 \geq 0\,, \quad \xi_1 + 2\xi_2 \leq 6, \quad 2\xi_1 + \xi_2 \leq 3.$$

а, поскольку их число 3>dim(E^2)=2, то это решение *переопределенное*,

и

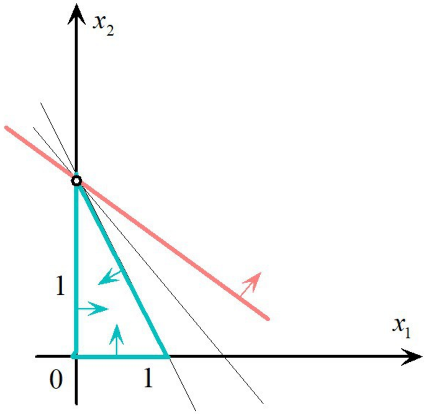
двойственная задача с *неединственным* решением

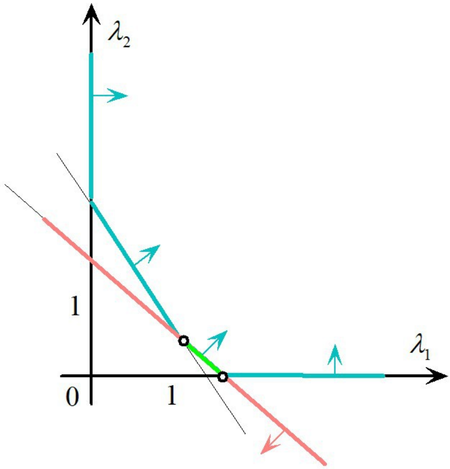
найти минимум $G = 6\lambda_1 + 3\lambda_2$ *по* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\lambda_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2,$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$$

с решением $\lambda_1^* = t\,;\, t \in [0, \frac{4}{3}]; \quad \lambda_2^* = 3 - 2t\,; \quad G^* = 9.$


x_2
1
x_1
0
1


λ_2
1
λ_1
0
1

б) <u>обе задачи взаимодвойственной пары имеют неединственное решение:</u>

найти максимум $F = \xi_1 + 2\xi_2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \ge 0, \quad j = [1,2],$$
$$2\xi_1 + 4\xi_2 \le 4,$$
$$3\xi_1 + 6\xi_2 \le 6,$$

с решением $\xi_1^* = t\,;\, t \in [0,2]; \quad \xi_2^* = 1 - \frac{1}{2}t\,; \quad F^* = 2.$

и двойственная задача

найти минимум $G = 4\lambda_1 + 6\lambda_2$ *по* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\lambda_i \ge 0, \quad j = [1,2],$$
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 \ge 1,$$
$$4\lambda_1 + 6\lambda_2 \ge 2,$$

с решением $\lambda_1^* = t\,;\, t \in [0, \frac{1}{2}]; \quad \lambda_2^* = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t\,; \quad G^* = 2.$

Общая постановка задачи параметрического программирования

Пусть $x \in E^n$ – вектор переменных и – вектор параметров являются элементами конечномерных евклидовых пространств соответственно с координатными представлениями $\| x \| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{matrix} \right\|$ и $\| u \| = \left\| \begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \cdots \\ \nu_k \end{matrix} \right\|$.

Рассмотрим следующую задачу, которую принято называть *задачей параметрического программирования*:

$$\text{\textit{найти}}\ \max_x F(x,u)$$

$$\text{\textit{при условиях}}:\ f_i(x,u) \le 0, \quad i = [1,m], \tag{1.3}$$

и пусть x_u^* есть решение задачи (1.3) для некоторого фиксированного $u \in \Omega \subseteq E^k$.

Любую задачу, в формулировке которой используется , будем называть задачей *в пространстве параметров* или параметрической задачей *верхнего уровня*.

Например, задачу

$$\max_u F(x_u^*, u) \text{ при условии } . \qquad (1.4)$$

В отличие от задач этого типа, задачу (1.3) будем называть задачей *"нижнего уровня*".

Свойства решений задач
параметрического программирования

Пусть есть решение задачи (1.3) для фиксированного u, а задача верхнего уровня сформулирована в виде

$$\max_u F(x_u^*, u) \quad ,$$

где $F(x,u)$ – некоторая функция, зависящая как оттак и от .

Как постановка, так и процедура решения задачи (1.4) *могут* в значительной степени осложняться следующими специфическими свойствами зависимости .

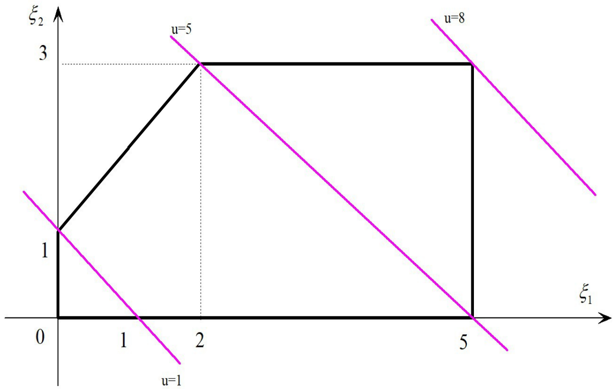
1. Практической *невозможностью* (за исключением, быть может, некоторых тривиальных случаев) аналитического решения задачи нижнего уровня (1.3), а, значит, также и постановки, исследования и решения в явном виде задачи верхнего уровня (1.4).
2. Несовпадением в общем случае области определения зависимости и множества , поскольку система условий задачи нижнего уровня (1)−(2) может оказаться *противоречивой* для некоторых $u \in \Omega \subseteq E^l$.
3. *Нефункциональностью* (неоднозначностью) зависимости для тех , при которых задача нижнего уровня (1.3) имеет решение, но *не единственное*.
4. *Негладкостью* зависимости в силу того, что условия задачи "нижнего уровня" (1.3) могут содержать ограничения типа *неравенство*. Более того, даже существование непрерывных производных у функций и достаточно высокого порядка не гарантирует необходимой гладкости (а иногда даже и непрерывности) зависимости и, следовательно, входящих в формулировку задачи верхнего уровня, условий.

Причины, порождающие подобные свойства можно проиллюстрировать следующим примером.

Рассмотрим следующую задачу параметрического программирования:

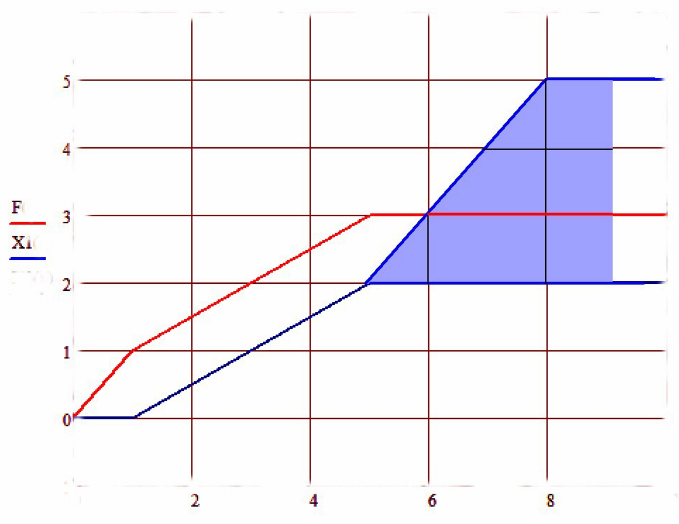
$\forall u \in \mathbf{R}$ максимизировать по $x = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\| \in E^2$ функцию $F = \xi_2$

при условиях: $\begin{matrix} 0 \le \xi_1 \le 5, & 0 \le \xi_2 \le 3, \\ \xi_1 - \xi_2 \le -1, & \xi_1 + \xi_2 \le u\ . \end{matrix}$



Решение этой задачи представляется зависимостями

u	F_u^*	ξ_{1u}^*	ξ_{2u}^*
$(-\infty, 0)$	*не сущ.*	*не сущ*	*не сущ*
$[0, 1)$	u	0	u
$[1, 5)$	$\dfrac{u+1}{2}$	$\dfrac{u-1}{2}$	$\dfrac{u+1}{2}$
$[5, 8]$	3	$\forall[2, u-3]$	3
$(8, +\infty)$	3	$\forall[2, 5]$	3



В качестве иллюстрации приведем еще один пример.

1. Задача *нижнего уровня* - задача линейного программирования с нелинейно входящими в ее условие параметрами, для которой $\left\| x \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{matrix} \right\|$ и – координатные представления векторов и . Требуется решить задачу:

$$\textit{найти } \max_x 2\xi_1 + 3\xi_2$$

$$\textit{при условиях}: \ \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0,$$
$$\xi_1 + \nu_1 \xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq \nu_2,$$

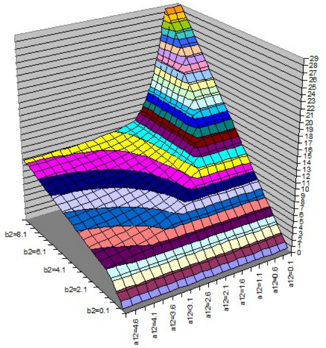
решение которой представляется зависимостями $\xi^*_{\nu_1, \nu_2}$ и .

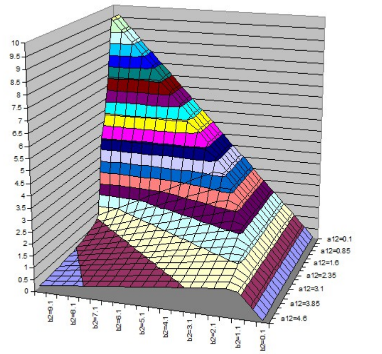
2. Задача *верхнего уровня*:

$$\max_{u} 2\xi^*_{1,\nu_1,\nu_2} + 3\xi^*_{2\,\nu_1,\nu_2}$$

при условиях:

$$0.1 \le \nu_1 \le 5, \qquad 0.1 \le \nu_2 \le 10 .$$





На этих рисунках приведены графические представления зависимостей соответственно

$$2\xi^*_{1,\nu_1,\nu_2} + 3\xi^*_{2\,\nu_1,\nu_2} \qquad \text{и} \qquad \xi^*_{2\,\nu_1,\nu_2}$$

от – компонент вектора , которые позволяют заключить, что данные зависимости непрерывные, нелинейные, невыпуклые и не дифференцируемые для всех , а задача нижнего уровня имеет неединственное решение.