ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Задачей ***математического программирования*** принято называть задачу:

максимизировать $F(x)$ *по* $x \in E^n$

при условиях: $f_i(x) \le 0 \quad i = \overline{1,m}$

или, в координатной форме,

найти максимум $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *по* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$,

при условиях:

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0, \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0, \\ \qquad \ldots \\ f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \le 0. \end{cases}$$

ПОСТАНОВКА
ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если функции $F(x)$ и $f_i(x) \le 0 \quad i = \overline{1,m}$ линейные, то задачу математического программирования называют задачей *линейного программирования*.

В дальнейшем мы будем использовать следующую конкретную форму постановки задач линейного программирования.

$$\textit{Найти максимум} \qquad \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j \quad \textit{по} \quad \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E^n \,,$$

$$\textit{при условиях}: \qquad \xi_j \ge 0 \,, \quad j = [1, n], \tag{1.1}$$

$$-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \le 0 \,, \quad i = [1, m].$$

Множество элементов $x \in E^n$, удовлетворяющих всем ограничениям задачи (1.1), будем обозначать R.

Определение 1.1.

Принято говорить, что

- элемент $x^0 \in E^n$ *допустимым*, если на нем выполнены *все* ограничения задачи ЛП, то есть, $x^0 \in R$;

- ограничение типа "неравенство" задачи ЛП на элементе $x^0 \in E^n$ называется *активным*, если на этом x^0 данное ограничение нарушено, или выполняется как равенство;
- если задача ЛП имеет хотя бы один допустимый элемент, то задача ЛП называется *совместной.* Иначе говорят, что задача ЛП *несовместна*.

- ограниченный элемент x^* называется *решением*, если он удовлетворяет всем ограничениям, а целевой функционал имеет на нем экстремальное значение. Сама задача ЛП в этом случае называется *совместной.*

- ограниченное решение x^* задачи ЛП называется *переопределенным*, если число ограничений, активных на x^*, больше, чем размерность пространства E^n;

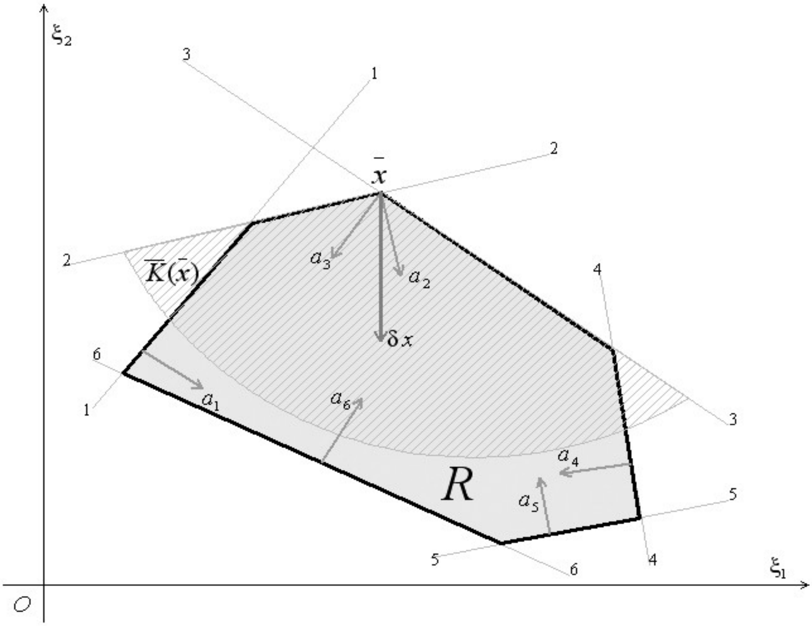


Рис. 1.1.

Для выбранного граничного элемента $\bar{x}$ (рис. 1.1) активными являются ограничения с индексами 2 и 3. Остальные ограничения на этом элементе неактивны. Множество *допустимых элементов* R отмечено серым цветом, а конус *допустимых направлений* $\overline{K}(\bar{x})$ заштрихован.

Условие *оптимальности* элемента $\bar{x}$ геометрически означает, что любая допустимая вариация δx на элементе $\bar{x}$ является в E^2 вектором, образующим не тупой угол со всеми нормальными, ориентированными внутрь R, векторами *всех активных* на $\bar{x}$ ограничениях.

Вариация δx называется *улучшающей* для элемента $\bar{x}$, если

$$F(\bar{x} + \delta x) > F(\bar{x}) \,.$$

Как решаются задачи линейного программирования

Проиллюстрируем применение описанной схемы для следующей задачи линейного программирования:

Найти максимум $2\xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$$

Приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4:

Найти максимум $2\xi_1 + 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,4],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$$

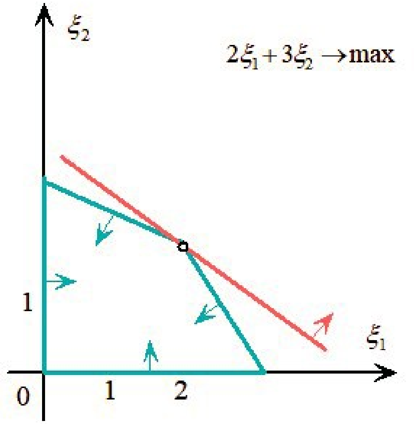
Пусть $\left\| x' \right\| = \left\| \xi_1 \quad \xi_2 \right\|^{\mathrm{T}}$, тогда в силу двух последних равенств и условия неотрицательности переменных,

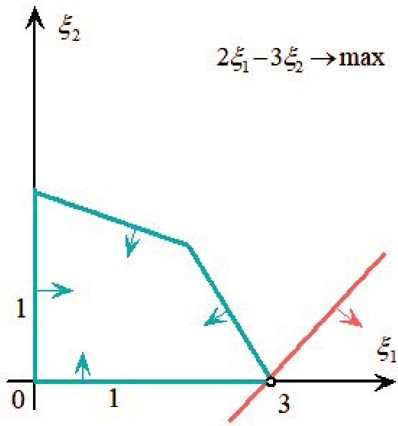
$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0 \,.$$

Что в свою очередь приводит к выражению для функционала

$$2\xi_1 + 3\xi_2 = 10 - \frac{4}{3}\xi_3 - \frac{1}{3}\xi_4 \,,$$

из которого в силу неотрицательности ξ_3 и ξ_4 получаем, что *максимальное* значение функционала равно 10 на элементе $\left\| x^* \right\| = \left\| 2 \quad 2 \right\|^{\mathrm{T}}$.


ξ_2
$2\xi_1 + 3\xi_2 \to \max$
1
ξ_1
0
1
2


ξ_2
$2\xi_1 - 3\xi_2 \to \max$
1
ξ_1
0
1
3

На практике процедура решения часто оказываться более сложной. Пусть, например, требуется:

найти максимум $2\xi_1 - 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

$\xi_i \geq 0 , \quad j = [1,2],$

при условиях: $\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$

$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$

Приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4:

Найти максимум $2\xi_1 - 3\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,

при условиях: $\xi_i \geq 0 , \quad j = [1,4],$

$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$

$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$

Пусть снова $\| x' \| = \| \xi_1 \quad \xi_2 \|^{\mathrm{T}}$, тогда мы имеем

$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Это приводит к иному выражению для целевого функционала

$$2\xi_1 - 3\xi_2 = -2 + \frac{8}{3}\xi_3 - \frac{7}{3}\xi_4 .$$

Из этой формулы, следует, что, в силу неотрицательности ξ_4, оптимальное значение ξ_4 следует выбрать нулевым, а вот значение ξ_3 нужно постараться сделать как можно большим.

Из равенств

$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4$$

вытекает, что с ростом ξ_3 значение ξ_1 неограниченно возрастает, а значение ξ_2 убывает, но не может стать *отрицательным* числом. Поэтому (учитывая, что $\xi_4 = 0$) мы приходим к следующему условию, определяющему максимально допустимую величину ξ_3

$$\xi_2(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 \geq 0\,.$$

Откуда $\xi_3 \leq 3$. И окончательно мы приходим к заключению, что координаты оптимального элемента в E^4 для задачи и канонической форме имеют вид

$$\xi_1^* = 3\,; \quad \xi_2^* = 0\,; \quad \xi_3^* = 3\,; \quad \xi_4^* = 0\,.$$

Следовательно, максимальное значение целевого функционала равно 6.

Случай переопределенного решения задачи линейного программирования.

Решение задачи ЛП, как точка в E^n может однозначно определяться *n* линейно независимыми линейными ограничениями типа равенство. Но в принципе таких ограничений может быть и больше.

Рассмотрим задачу:

$$\textit{найти максимум } 2\xi_1 - 3\xi_2 \quad \textit{на} \quad \{\xi_1, \xi_2\} \in E^2,$$

$$\begin{aligned} & \xi_i \geq 0, \quad j = [1,2], \\ \textit{при условиях: } & \xi_1 + 2\xi_2 \leq 3, \\ & 2\xi_1 + \xi_2 \leq 6. \end{aligned}$$

Опять же приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4:

$$\textit{Найти максимум } 2\xi_1 - 3\xi_2 \quad \textit{на} \quad \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4,$$

$$\textit{при условиях: } \xi_i \geq 0, \quad j = [1,4],$$

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 &= 3, \\ 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 &= 6. \end{aligned}$$

Пусть снова $\left\| x' \right\| = \left\| \xi_1 \quad \xi_2 \right\|^{\mathrm{T}}$, тогда мы имеем

$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 3 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \xi_2(\xi_3,\xi_4) = -\frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Это приводит к иному выражению для целевого функционала

$$2\xi_1 - 3\xi_2 = 6 + \frac{8}{3}\xi_3 - \frac{7}{3}\xi_4 .$$

Из этой формулы, следует, что, в силу неотрицательности ξ_4, оптимальное значение ξ_4 следует выбрать нулевым, а вот значение ξ_3 нужно постараться сделать как можно большим.

Из равенств

$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 3 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3,\xi_4) = -\frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4$$

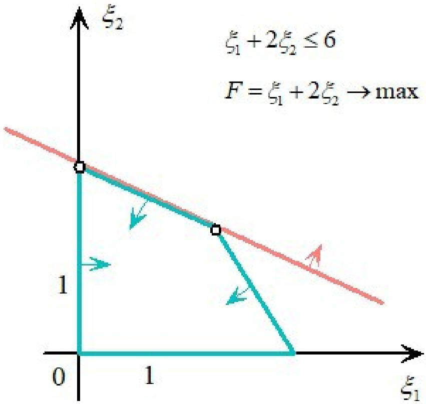
вытекает, что с ростом ξ_3 значение ξ_1 неограниченно возрастает, а значение ξ_2 убывает, но не может стать *отрицательным* числом. Поэтому (учитывая, что $\xi_4 = 0$) мы приходим к следующему условию, определяющему максимально допустимую величину ξ_3

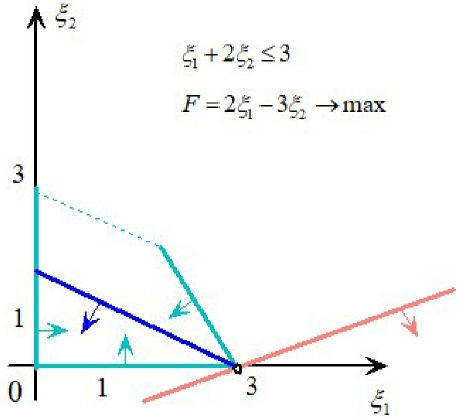
$$\xi_2(\xi_3,\xi_4) = -\frac{2}{3}\xi_3 \geq 0 .$$

Откуда $0 \leq \xi_3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_3 = 0$. И окончательно мы приходим к заключению, что координаты оптимального элемента в E^4 для задачи и канонической форме имеют вид

$$\xi_1^* = 3\,; \quad \xi_2^* = 0\,; \quad \xi_3^* = 0\,; \quad \xi_4^* = 0\,.$$

Следовательно, максимальное значение целевого функционала равно 6. Но при этом число активных в точке решения ограничений равно $3 > n = 2$. Переопределенность!


ξ_2
$\xi_1 + 2\xi_2 \le 6$
$F = \xi_1 + 2\xi_2 \to \max$
1
0
1
ξ_1


ξ_2
$\xi_1 + 2\xi_2 \le 3$
$F = 2\xi_1 - 3\xi_2 \to \max$
3
1
0
1
3
ξ_1

Случай неединственного решения задачи линейного программирования.

Решение задачи ЛП, как точка в E^n может однозначно определяться n линейно независимыми линейными ограничениями типа равенство. Но в некоторых случаях е таких ограничений может быть и меньше, чем n.

Рассмотрим задачу:

найти максимум $\xi_1 + 2\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:
$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1, 2],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6.$$

Опять же приведем условие этой задачи к каноническому виду включением в условие двух дополнительных неотрицательных компонент ξ_3 и ξ_4:

Найти максимум $\xi_1 + 2\xi_2$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \in E^4$,

при условиях: $\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,4],$
$$\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 + \xi_4 = 6.$$

Пусть снова $\| x \| = \| \xi_1 \quad \xi_2 \|^{\mathrm{T}}$, тогда мы имеем

$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \xi_2(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4 \geq 0.$$

Это приводит к иному выражению для целевого функционала

$$F = \xi_1 + 2\xi_2 = 6 - \xi_3 + 0 \cdot \xi_4 \,.$$

Из этой формулы, следует, что, в силу неотрицательности ξ_3, оптимальное значение ξ_3 следует выбрать нулевым, а вот значение ξ_4 на значение целевого функционала влиять не будет.

Допустимые значения ξ_4 очевидно существуют. Например 0. Но любое ли неотрицательное значение может быть у ξ_4 в этой задаче?

Из равенств

$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 2 + \frac{1}{3}\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4 \quad \text{и} \quad \xi_2(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_3 + \frac{1}{3}\xi_4$$

вытекает, что с ростом ξ_3 значение ξ_1 неограниченно возрастает, а значение ξ_2 убывает, но не может стать *отрицательным* числом. Поэтому (учитывая, что $\xi_3 = 0$) мы приходим к следующему условию, определяющему максимально допустимую величину ξ_4

$$\xi_1(\xi_3,\xi_4) = 2 - \frac{2}{3}\xi_4 \geq 0\,.$$

Откуда $0 \leq \xi_4 \leq 3$.

Используем параметрическую форму записи ответа. Для этого положим

$\xi_4 = t, \quad 0 \leq t \leq 3$. Тогда получаем, что $\begin{array}{l} \xi_1 = 2 - \frac{2}{3}t \\ \xi_2 = 2 + \frac{1}{3}t \end{array}$.

И окончательно мы приходим к заключению, что координаты оптимального элемента в E^4 для задачи и канонической форме имеют вид

$$\xi_1^* = 2 - \frac{2}{3}t\,; \quad \xi_2^* = 2 + \frac{1}{3}t\,; \quad \xi_3^* = 0\,; \quad \xi_4^* = t.$$

при любом $0 \leq t \leq 3$. Наконец, максимальное значение целевого функционала равно .

$$F^* = \left(2 - \frac{2}{3}t\right) + 2\left(2 + \frac{1}{3}t\right) = 6 \qquad \forall t \in [0,3].$$