Прямая и двойственная задачи линейного программирования

Рассмотрим следующую пару задач :

прямую задачу:

найти максимум $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E^n$,

при условиях:

$$\xi_j \geq 0 \, , \; j = [1, n], \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \leq \beta_i \, , \; j = [1, m]$$

и *двойственную* ***задачу*:**

найти минимум $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i$ *на* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \in E^m$,

при условиях: (1.2)

$$\lambda_i \geq 0 \, , \; i = [1, m], \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \geq \sigma_i \, , \; i = [1, n].$$

Основные правила, связывающие условия прямой и двойственной задач таковы:

Если в условии *прямой* задачи	**то в условии *двойственной* задачи**
Найти максимум	Найти минимум
Найти минимум	Найти максимум
Число переменных	Число ограничений
Число ограничений	Число переменных
j -ый коэффициент целевого функционала	правая часть j -го неравенства
правая часть i -го неравенства	i -ый коэффициент целевого функционала
j -ый столбец в матрице ограничений	j -ая строка в матрице ограничений
i -ая строка в матрице ограничений	i -ый столбец в матрице ограничений

Заметим, что в силу этих правил задача двойственная к двойственной является прямой задачей.

Теоремы двойственности в линейном программировании

Для каждой пары взаимодвойственных задач верна

Теорема 1.1

Если $\left\| x^* \right\| = \left\| \xi_1^* \quad \xi_2^* \quad \dots \quad \xi_n^* \right\|^{\mathrm{T}}$ **– решение прямой задачи, а** $\left\| \Lambda^* \right\| = \left\| \lambda_1^* \quad \lambda_2^* \quad \dots \quad \lambda_m^* \right\|^{\mathrm{T}}$ **– решение двойственной задачи, то справедливы равенства:**

1°. ***основное соотношение двойственности***

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i^*;$$

2°. ***соотношения дополняющей нежесткости***

$$\lambda_i^* (-\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j^*) = 0 \; ; \; \forall i = [1, m],$$

$$\xi_j^* (-\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i^*) = 0 \; ; \; \forall j = [1, n].$$

Следствие: метод "*малых вариаций*".

Пусть $F^* = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i^*$,

тогда $\frac{\partial F^*}{\partial \beta_i} = \lambda_i^*$.

Или, приближенно, $\lambda_i^* \approx \frac{\Delta F^*}{\Delta \beta_i}$.

Свойства пары взаимодвойственных задач ЛП

Основное соотношение двойственности и *условия дополняющей нежесткости* являются базовыми свойствами взаимодвойственной пары задач. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.2. **Если x^* и Λ^* допустимые элементы пары взаимодвойственных задач такие, что**

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j^* = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i^* ,$$

то x^* и Λ^* – решения этих задач.

Для пары взаимодвойственных задач имеет место следующая (подтверждаемая примерами) альтернатива:

а) <u>обе задачи имеют решение:</u> ***прямая***

Найти максимум $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 6$$

с решением $\xi_1^* = 2,\ \xi_2^* = 2,\ F^* = 10$

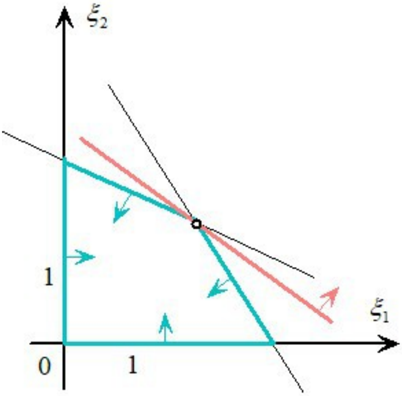
и

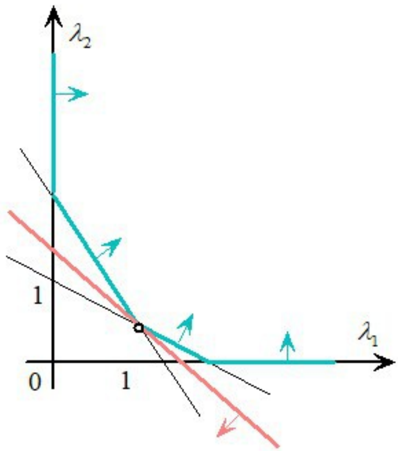
двойственная

Найти минимум $G = 6\lambda_1 + 6\lambda_2$ *по* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\lambda_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2,$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$$

с решением $\lambda_1^* = \frac{4}{3},\ \lambda_2^* = \frac{1}{3},\ G^* = 10.$


ξ_2
ξ_1
1
0
1


λ_2
λ_1
1
0
1

б) <u>обе задачи несовместны</u>:

найти максимум $F = \xi_1 + 3\xi_2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \ge 0, \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 - \xi_2 \le 3,$$
$$-\xi_1 + \xi_2 \le -4.$$

и

найти минимум $G = 3\lambda_1 - 4\lambda_2$ *по* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\lambda_i \ge 0, \quad j = [1,2],$$
$$\lambda_1 - \lambda_2 \ge 1,$$
$$-\lambda_1 + \lambda_2 \ge 3.$$

в) <u>одна задача совместна, а другая – нет:</u>

найти максимум $F = \xi_1$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \geq 0\ , \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 - \xi_2 \leq 1,$$

с *неограниченым целевым функционалом* на множестве допустимых состояний

и

найти минимум $G = \lambda_1$ *по* $\{\lambda_1\} \in E^1$,

при условиях:

$$\lambda_1 \geq 0\ ,$$
$$\lambda_1 \geq 1,$$
$$-\lambda_1 \geq 0,$$

которая *несовместна*.

Обратите внимание, что согласно определению 4.1.1 первая из задач в пункте в) решений не имеет. Этот факт обобщает

Единственность и переопределенность решений взаимодвойственных задач ЛП

Рассмотренные выше утверждения справедливы как случаев единственного, так и неединственного решения задачи ЛП.

Следующая теорема позволяет делать заключение о числе этих решений.

Теорема 1.3. **Если одна из взаимодвойственных задач имеет *единственное, переопределенное* решение, то другая задача имеет *неединственное* решение.**

Отметим также, что возможен случай, когда обе задачи взаимодвойственной пары имеют неединственное решение. Проиллюстрируем два последних утверждения примерами.

а) <u>прямая задача переопределена, а двойственная имеет неединственное решение:</u>

найти максимум $F = 2\xi_1 + 3\xi_2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\xi_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\xi_1 + 2\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 3$$

с решением $\xi_1^* = 0, \xi_2^* = 3, F^* = 9$

В этом случае на элементе x^* активными являются ограничения

$$\xi_1 \geq 0\,, \quad \xi_1 + 2\xi_2 \leq 6, \quad 2\xi_1 + \xi_2 \leq 3.$$

а, поскольку их число 3>dim(E^2)=2, то это решение *переопределенное*,

и

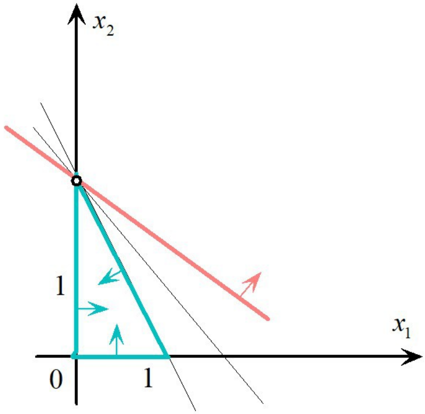
двойственная задача с *неединственным* решением

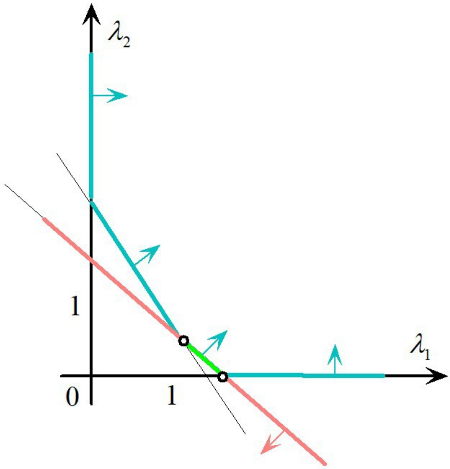
найти минимум $G = 6\lambda_1 + 3\lambda_2$ *по* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,

при условиях:

$$\lambda_i \geq 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2,$$
$$2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$$

с решением $\lambda_1^* = t\,;\, t \in [0, \frac{4}{3}]; \quad \lambda_2^* = 3 - 2t\,; \quad G^* = 9.$


x_2
1
x_1
0
1


λ_2
1
λ_1
0
1

б) <u>обе задачи взаимодвойственной пары имеют неединственное решение:</u>

найти максимум $F = \xi_1 + 2\xi_2$ *по* $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\xi_i \ge 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$2\xi_1 + 4\xi_2 \le 4,$$
$$3\xi_1 + 6\xi_2 \le 6,$$

с решением $\xi_1^* = t\,;\, t \in [0,2];\quad \xi_2^* = 1 - \dfrac{1}{2}t\,;\quad F^* = 2.$

и двойственная задача

найти минимум $G = 4\lambda_1 + 6\lambda_2$ *по* $\{\lambda_1, \lambda_2\} \in E^2$,
при условиях:

$$\lambda_i \ge 0\,, \quad j = [1,2],$$
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 \ge 1,$$
$$4\lambda_1 + 6\lambda_2 \ge 2,$$

с решением $\lambda_1^* = t\,;\, t \in [0, \dfrac{1}{2}];\quad \lambda_2^* = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}t\,;\quad G^* = 2.$