Общая постановка задачи параметрического программирования

Пусть $x \in E^n$ – вектор переменных и – вектор параметров являются элементами конечномерных евклидовых пространств соответственно с координатными представлениями $\| x \| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{Vmatrix}$ и $\| u \| = \begin{Vmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \cdots \\ \nu_k \end{Vmatrix}$.

Рассмотрим следующую задачу, которую принято называть *задачей параметрического программирования*:

$$\begin{gathered} \textit{найти } \max_x F(x,u) \\ \textit{при условиях: } f_i(x,u) \le 0, \quad i = [1,m], \end{gathered} \tag{1.3}$$

и пусть x_u^* есть решение задачи (1.3) для некоторого фиксированного $u \in \Omega \subseteq E^k$.

Любую задачу, в формулировке которой используется , будем называть задачей *в пространстве параметров* или параметрической задачей *верхнего уровня*.

Например, задачу

$$\max_u F(x_u^*, u) \text{ при условии } u \in \Omega \subseteq E^k \ . \qquad (1.4)$$

В отличие от задач этого типа, задачу (1.3) будем называть задачей *"нижнего уровня"*.

**Свойства решений задач
параметрического программирования**

Пусть есть решение задачи (1.3) для фиксированного u, а задача верхнего уровня сформулирована в виде

$$\max_u F(x_u^*, u) \quad ,$$

где $F(x,u)$ – некоторая функция, зависящая как от *x* так и от *u*.

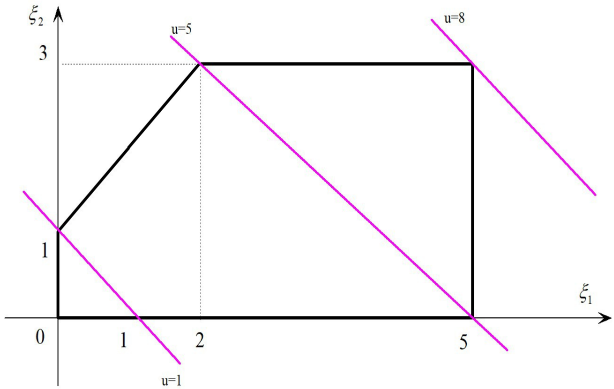
Как постановка, так и процедура решения задачи (1.4) *могут* в значительной степени осложняться следующими специфическими свойствами зависимости .

1. Практической *невозможностью* (за исключением, быть может, некоторых тривиальных случаев) аналитического решения задачи нижнего уровня (1.3), а, значит, также и постановки, исследования и решения в явном виде задачи верхнего уровня (1.4).
2. Несовпадением в общем случае области определения зависимости x_u^* и множества , поскольку система условий задачи нижнего уровня (1)−(2) может оказаться *противоречивой* для некоторых $u \in \Omega \subseteq E^l$.
3. *Нефункциональностью* (неоднозначностью) зависимости x_u^* для тех u, при которых задача нижнего уровня (1.3) имеет решение, но *не единственное*.
4. *Негладкостью* зависимости x_u^* в силу того, что условия задачи "нижнего уровня" (1.3) могут содержать ограничения типа *неравенство*. Более того, даже существование непрерывных производных у функций F и f достаточно высокого порядка не гарантирует необходимой гладкости (а иногда даже и непрерывности) зависимости x_u^* и, следовательно, входящих в формулировку задачи верхнего уровня, условий.

Причины, порождающие подобные свойства можно проиллюстрировать следующим примером.

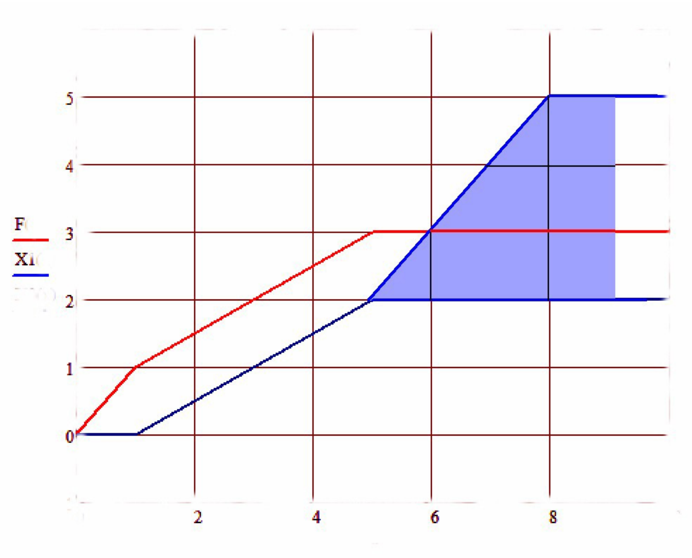
Рассмотрим следующую задачу параметрического программирования: $\forall u \in \mathbf{R}$ максимизировать по $x = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix} \in E^2$ функцию $F = \xi_2$

при условиях: $\begin{matrix} 0 \le \xi_1 \le 5, & 0 \le \xi_2 \le 3, \\ \xi_1 - \xi_2 \le -1, & \xi_1 + \xi_2 \le u \,. \end{matrix}$



Решение этой задачи представляется зависимостями

u	F_u^*	ξ_{1u}^*	ξ_{2u}^*
$(-\infty, 0)$	*не сущ.*	*не сущ*	*не сущ*
$[0, 1)$	u	0	u
$[1, 5)$	$\dfrac{u+1}{2}$	$\dfrac{u-1}{2}$	$\dfrac{u+1}{2}$
$[5, 8]$	3	$\forall[2, u-3]$	3
$(8, +\infty)$	3	$\forall[2, 5]$	3



В качестве иллюстрации приведем еще один пример.

1. Задача *нижнего уровня* - задача линейного программирования с нелинейно входящими в ее условие параметрами, для которой $\|x\| = \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}$ и $\|u\| = \begin{Vmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{Vmatrix}$ – координатные представления векторов x и u. Требуется решить задачу:

$$\text{\textit{найти}} \max_x 2\xi_1 + 3\xi_2$$

$$\text{\textit{при условиях}}\text{:}\ \xi_1 \geq 0,\ \xi_2 \geq 0,$$
$$\xi_1 + \nu_1\xi_2 \leq 6,$$
$$2\xi_1 + \xi_2 \leq \nu_2,$$

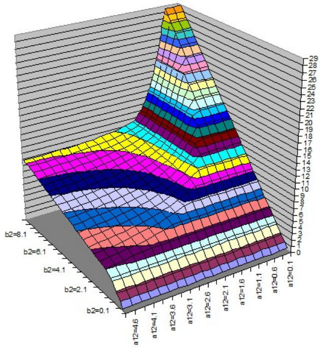
решение которой представляется зависимостями $\xi^*_{\nu_1,\nu_2}$ и $F^*_{\nu_1,\nu_2}$.

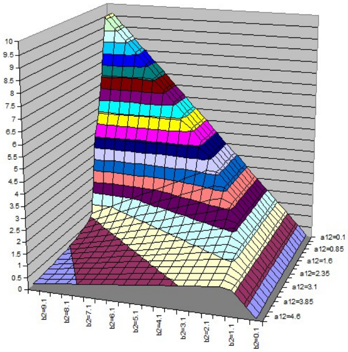
2. Задача *верхнего уровня*:

$$\max_{u} 2\xi^*_{1,v_1,v_2} + 3\xi^*_{2\,v_1,v_2}$$

при условиях:

$$0.1 \le v_1 \le 5, \qquad 0.1 \le v_2 \le 10\,.$$





На этих рисунках приведены графические представления зависимостей соответственно

$$F^*_{\nu_1,\nu_2} = 2\xi^*_{1,\nu_1,\nu_2} + 3\xi^*_{2\,\nu_1,\nu_2} \qquad \text{и} \qquad \xi^*_{2\,\nu_1,\nu_2}$$

от – компонент вектора *u*, которые позволяют заключить, что данные зависимости непрерывные, нелинейные, невыпуклые и не дифференцируемые для всех *u*, а задача нижнего уровня имеет неединственное решение.