ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПОЛНЫХ МОДЕЛЕЙ

Структура линейной неполной математической модели, используемой в программах "БАЛАНС" и "MultiLC"

Основой неполной математической модели является упорядоченный n-компонентный *список показателей* – величин, значения которых характеризуют состояние модели.

(Термин *показатель* может быть заменен словами *переменная* или *неизвестная*).

Описание математической модели включает также дополнительные числовые характеристики этих показателей – *атрибуты*,

- частично задаваемых в качестве *исходных данных* и
- частично рассчитываемых в автоматическом режиме как *решение*.

К атрибутам - *исходным данным*, которые может задавать пользователь, относятся:

- границы обязательного (допустимого) диапазона значений показателей;
- границы желательного (целевого) диапазона значений показателей;
- коэффициенты линейных зависимостей между показателями.

К автоматически рассчитываемым атрибутам - *решениям* - в первую очередь относятся:

- значения показателей;
- минимально возможные величины нарушения границ обязательного диапазона;
- минимально возможные величины нарушения границ диапазона желательных значений;

Пусть общее число показателей равно n, а значение показателя с номером k обозначается ξ_k, где $k = [1, n]$, то есть, k принимает значения от 1 до n.

Обязательные ограничения и связи

Границы допустимого диапазона значений показателя

Главными атрибутами показателя являются границы диапазона его *допустимых* (*обязательных*) значений. Конкретно диапазон допустимых значений определяется заданием *нижней* и *верхней границ* этого диапазона.

В режиме автоматического расчета значений показателей выполняется поиск такого состояния модели, для которого *ни одна* из границ обязательного диапазона не оказывается нарушенной. Такие состояния модели называются *допустимыми* (или *совместными*).

Если же таких состояний не обнаруживается, то автоматическая обработка модели завершается. Состояния модели, в которых нарушена хотя бы одна граница допустимого диапазона, называются *недопустимыми* (или *несовместными*).

Формально множество допустимых значений показателей модели определяется системой двусторонних ограничений следующего вида.

Обозначим через d_k и D_k соответственно *величины нижних и верхних границ допустимого диапазона значений* k-го показателя ξ_k. Тогда множество допустимых состояний модели будет задаваться системой неравенств: $d_k \le \xi_k \le D_k$, где $k = [1, n]$.

Значения границ допустимых (обязательных) диапазонов величин показателей могут быть любыми вещественными числами, удовлетворяющими неравенствам: $d_k \le D_k$, $k = [1, n]$.

Равенство верхней и нижней границ возможно, в этом случае показатель сможет принимать лишь единственное значение.

Часть границ допустимых (обязательных) диапазонов может отсутствовать или же быть установленной "по умолчанию". Если значение некоторого показателя не ограничено сверху, то предполагается равенство этой границы "плюс бесконечности", моделируемой достаточно большим положительным числом. Аналогично, в случае отсутствия нижней границы предполагается ее равенство "минус бесконечности", представляемой достаточно большим по абсолютной величине отрицательным числом.

По умолчанию для всех показателей модели нижние границы допустимого диапазона устанавливаются равными нулю, а верхние предполагаются отсутствующими. Таким образом, пользователю необходимо указывать в модели допустимые границы лишь в тех случаях, когда эти границы реально существуют.

Задание связей между показателями

Показатели в неполной математической модели могут быть связаны друг с другом *линейными* зависимостями. Условие линейности означает, что зависимости между величинами показателей являются линейными однородными функциями, то есть, один показатель представим в виде суммы других показателей, умноженных на некоторые постоянные коэффициенты.

По соображениям повышения практической эффективности каждый показатель модели может явно зависеть *только лишь от стоящих ранее него в списке показателей*, то есть, от показателей, номера которых меньше, чем номер данного показателя.

Это означает, что линейная функция, выражающая зависимость между показателями, имеет следующий вид:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki}\xi_i, \text{ где } k = [2, n],$$

где величины A_{ki} являются фиксированными *коэффициентами линейных связей между показателями* рассматриваемой модели.

Значения коэффициентов A_{ki} в уравнениях связи полагаются *по умолчанию равными нулю*.

Совокупность *всех* состояний модели, удовлетворяющих как обязательным ограничениям, так и связям будем *называть множеством допустимых состояний*.

Целевые ограничения

При помощи целевых диапазонов в математической модели формализуются предпочтения и приоритеты пользователя. При этом формализуемые цели и предпочтения *могут конфликтовать* (*быть в противоречии*) как друг с другом, так и с обязательными условиями и связямти.

Обозначим через r_k и R_k соответственно *величины нижних и верхних границ целевого диапазона значений* k-го показателя ξ_k. Тогда множество целевых состояний модели будет задаваться системой неравенств: $r_k \le \xi_k \le R_k$, где $k = [1, n]$.

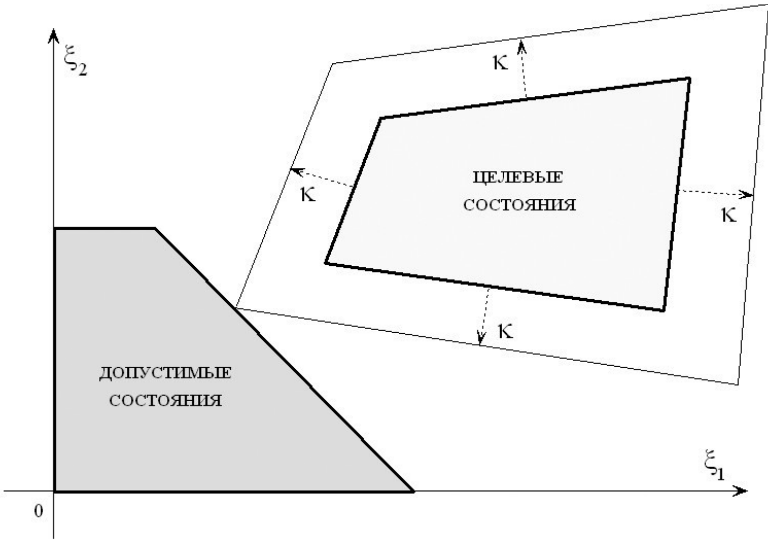
Для значений границ целевых диапазонов показателей также предполагается выполнение условий: $r_k \le R_k$, где $k = [1, n]$.

По умолчанию для всех показателей модели как нижние, так и верхние границы целевого диапазона *предполагаются отсутствующими*.

Совокупность *всех* состояний модели, удовлетворяющих целевым ограничениям будем *называть множеством желательных* (*целевых*) *состояний*.

Количественная оценка близости множеств допустимых и целевых состояний

Процедура решения задач для конкретной неполной математической модели состоит из нескольких шагов, на каждом из которых пользователь получает некоторый результат автоматического расчета, анализирует его и выполняет необходимое пополнение или коррекцию этой модели.



В режиме автоматического расчета значений показателей находится *допустимое* состояние неполной модели, наименее удаленное от множества целевых состояний, т.е. выбирается состояние, *минимально нарушающее границы целевого множества.*

Это состояние для краткости будем называть *квазиоптимальным*.

Величина оценки степени близости множеств допустимых и целевых состояний − *метрика* κ − есть оптимальное значение целевой функции следующей задачи линейного программирования:

минимизировать κ (*по совокупности* κ *и всех* ξ_i , *где* $i = [1, n]$), *при условиях*:

$$\kappa \ge 0\,, \qquad d_k \le \xi_k \le D_k\,, \quad ,$$
$$r_k - \kappa \le \xi_k \le R_k + \kappa\,, \qquad k = [1, n]\,,$$
$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki}\xi_i\,, \qquad k = [2, n]\,.$$

Заметим, что понятие метрики имеет смысл лишь для совместных состояний математической модели.

Метрику подобного вида принято называть *чебышевской* метрикой. Она, в отличие от стандартной геометрической евклидовой метрики, допускает содержательную интерпретацию для моделей социально-экономических объектов или процессов.

Группировка целевых границ

Используемая метрика обладает следующей особенностью, осложняющей анализ квазиоптимальных состояний:

> для оптимального значения κ, значения некоторых показателей могут иметь не единственное значение.

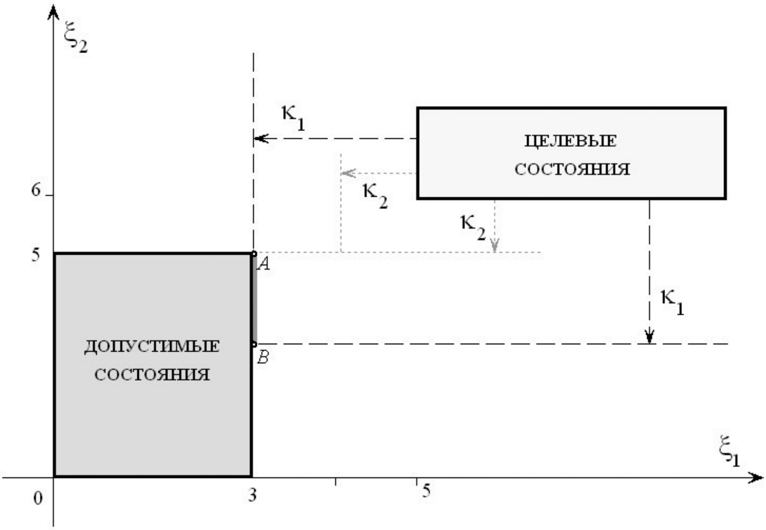
В этом случае для облечения процесса анализа множества квази оптимальных состояний неполной математической модели применяется специальная процедура устраняющая неоднозначность значения показателей.

Эта процедура, называемая *группировкой границ целевых диапазонов*, заключается в последовательном решении задач нахождения величины метрики, для каждой из которых из условия задачи исключаются ограничения, содержащие переменную κ путем превращения ее в константу в тех *активных неравенствах*, которые определяют оптимальное значение метрики для предыдущей задачи.

Для иллюстрации рассмотрим математическую модель с двумя показателями ξ_1 и ξ_2, диапазоны допустимых значений которых описывается условиями: $\begin{matrix} 0 \le \xi_1 \le 3, \\ 0 \le \xi_2 \le 5, \end{matrix}$ а множество целевых состояний – условиями: $\begin{matrix} 5 \le \xi_1 \le 11, \\ 6 \le \xi_2 \le 8, \end{matrix}$ тогда задача нахождения значения метрики принимает вид:

минимизировать κ *при условиях*:

$$
\begin{gathered}
\kappa \ge 0, \\
0 \le \xi_1 \le 3, \\
0 \le \xi_2 \le 5, \\
5 - \kappa \le \xi_1 \le 11 + \kappa, \\
6 - \kappa \le \xi_2 \le 8 + \kappa .
\end{gathered}
$$



Процедура *группировки* целевых ограничений.

Эта задача легко решается графически, и из рис. мы находим очевидный ответ: $\kappa = 2$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = [4{,}5]$. Заметим, что переменная ξ_2 определяется в этом случае *неоднозначно.* Решение - отрезок *AB*.

На следующем шаге процедура группировки целевых границ требует замену переменной κ константой 2 в активных ограничениях задачи.

Такое ограничение в рассматриваемом случае единственное: $5-\kappa \le \xi_1$. Выполнив данную подстановку, получаем, что на втором шаге процедуры необходимо решать задачу вида:

минимизировать κ *при условиях*:

$$\begin{aligned}
&\kappa \ge 0, \\
&0 \le \xi_1 \le 3, \\
&0 \le \xi_2 \le 5, \\
&3 \le \xi_1 \le 11+\kappa, \\
&6-\kappa \le \xi_2 \le 8+\kappa .
\end{aligned}$$

Решение и этой задачи также находится графически, оно имеет вид: $\kappa = 1$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = 5$.

Полученное решение определено однозначно, и поэтому процесс группировки закончен. В этом примере разбиение системы ограничений, описывающих множество целевых состояний на группы по их "удаленности" от множества допустимых состояний имеет следующий вид,

Группа	Расстояние до цели	Целевые ограничения в группе
1	2.	$5-\kappa \le \xi_1$
2	1.	$6-\kappa \le \xi_2$
0	0.	$\xi_1 \le 11+\kappa, \quad \xi_2 \le 8+\kappa$

Процесс последовательной фиксации завершается, если:

- либо все ограничения, содержащие κ, оказались зафиксированными;
- либо на некотором шаге процедуры последовательной фиксации значение κ оказалось равным нулю.

В итоге процедура группировки выполняет разбиение множества желательных ограничений на группы (отсюда – ее название), каждая из которых обладает своей собственной количественной оценкой "близости" целей и возможностей. Для большей наглядности эти величины именуются "расстоянием".

Строго говоря, метрикой, определяющей расстояние между множествами допустимых и целевых состояний, является не значение переменной κ, а набор монотонно убывающих чисел $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots, \kappa_T$, где T есть число групп фиксации, каждой из которых соответствует свое расстояние до цели.