ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПОЛНЫХ МОДЕЛЕЙ

Структура линейной неполной математической модели

Основой неполной математической модели является упорядоченный n-компонентный *список показателей* – величин, значения которых характеризуют состояние модели.

(Термин *показатель* может быть заменен словами *переменная* или *неизвестная*).

Описание математической модели включает также дополнительные числовые характеристики этих показателей – *атрибуты*,

- частично задаваемых в качестве *исходных данных* и
- частично рассчитываемых в автоматическом режиме как *решение*.

Факторы, включаемые пользователем в неполную математическую модель, могут формализоваться при помощи:

- *линейных ограничений* типа "равенство" или "неравенство", налагаемых на произвольные линейные комбинации значений показателей;
- операции поиска *минимума* или *максимума* этих комбинаций.

К атрибутам - *исходным данным*, относятся:

- границы обязательного (допустимого) диапазона значений показателей;
- границы желательного (целевого) диапазона значений показателей;
- коэффициенты ранжирования границ желательного диапазона;
- коэффициенты линейных зависимостей между показателями.

К автоматически рассчитываемым атрибутам - *решениям* - относятся:

- значения показателей;
- величины нарушения границ обязательного диапазона;
- двойственные оценки для границ обязательного диапазона;
- величины нарушения границ диапазона желательных значений;
- индекс группы целевых границ.

Пусть общее число показателей равно n, а значение показателя с номером k обозначается ξ_k, где $k = [1, n]$, то есть k принимает значения от 1 до n.

Обязательные ограничения и связи

Главными атрибутами показателя являются границы диапазона его *допустимых значений*. Конкретно диапазон допустимых значений определяется заданием нижней и верхней границ этого диапазона.

В режиме автоматического расчета значений показателей выполняется поиск такого состояния модели, для которого *ни одна* из границ обязательного диапазона не оказывается нарушенной. Такие состояния модели мы назвали *допустимыми* (или *совместными*).

Если же таких состояний не обнаруживается, то автоматическая обработка модели завершается. Состояния модели, в которых нарушена хотя бы одна граница допустимого диапазона, называются *недопустимыми* (или *несовместными*).

Формально множество допустимых значений показателей модели определяется системой двусторонних ограничений следующего вида. Обозначим через d_k и D_k соответственно *величины нижних и верхних границ допустимого диапазона значений* k-го показателя ξ_k. Тогда множество допустимых состояний модели будет задаваться системой неравенств: $d_k \le \xi_k \le D_k$, где $k = [1, n]$.

Значения границ допустимых (обязательных) диапазонов величин показателей могут быть любыми вещественными числами, удовлетворяющими неравенствам: $d_k \le D_k$, $k = [1, n]$.

Равенство верхней и нижней границ возможно, однако в этом случае показатель сможет принимать лишь единственное значение.

Часть границ допустимых (обязательных) диапазонов может отсутствовать или же быть установленной "по умолчанию". Если значение некоторого показателя не ограничено сверху, то предполагается равенство этой границы "плюс бесконечности", моделируемой достаточно большим положительным числом. Аналогично, в случае отсутствия нижней границы предполагается ее равенство "минус бесконечности", представляемой достаточно большим по абсолютной величине отрицательным числом.

По умолчанию для всех показателей модели нижние границы допустимого диапазона устанавливаются равными нулю, а верхние предполагаются отсутствующими. Таким образом, пользователю необходимо указывать в модели допустимые границы лишь в тех случаях, когда эти границы реально существуют.

Показатели в неполной математической модели могут быть связаны друг с другом *линейными* зависимостями. Условие линейности означает, что зависимости между величинами показателей являются линейными однородными функциями, то есть один показатель представим в виде суммы некоторых других показателей, умноженных на некоторые постоянные коэффициенты.

По соображениям повышения практической эффективности каждый показатель модели может явно зависеть только лишь от стоящих ранее него в списке показателей, то есть от показателей, номера которых меньше, чем номер данного показателя. Это означает, что линейная функция, выражающая зависимость между показателями, имеет следующий вид:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki}\xi_i, \quad \text{где } k = [2, n],$$

где величины A_{ki} являются фиксированными *коэффициентами линейных связей между показателями* рассматриваемой модели.

Значения коэффициентов в уравнениях связи полагаются по умолчанию равными.

Целевые ограничения

При помощи целевых диапазонов в математической модели формализуются предпочтения и приоритеты пользователя. При этом формализуемые цели и предпочтения могут конфликтовать как друг с другом, так и с обязательными условиями.

Обозначим через r_k и R_k соответственно *величины нижних и верхних границ целевого диапазона значений* k-го показателя ξ_k. Тогда множество целевых состояний модели будет задаваться системой неравенств: $r_k \le \xi_k \le R_k$, где $k = [1, n]$.

Для значений границ целевых диапазонов показателей также предполагается выполнение условий: $r_k \le R_k$, где $k = [1, n]$.

По умолчанию для всех показателей модели как нижние, так и верхние границы целевого диапазона предполагаются отсутствующими.

Расстояние между множествами допустимых и целевых состояний

Процедура решения задач для конкретной неполной математической модели состоит из нескольких шагов, на каждом из которых пользователь получает результат автоматического расчета, анализирует его и выполняет необходимое пополнение или коррекцию этой модели.

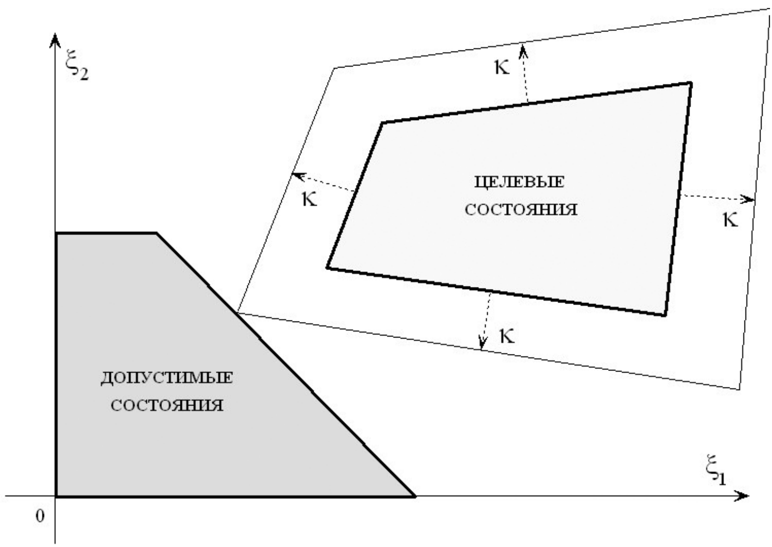

Рис. 7.1.4.1. Оценка степени близости множеств допустимых и целевых состояний в неполной математической модели.

В режиме автоматического расчета значений показателей находится условно допустимое состояние неполной модели, наименее удаленное от множества целевых состояний, т.е. выбирается состояние, *минимально* нарушающее границы целевых диапазонов.

В системе 'БАЛАНС' используются два различных метода оценки расстояния между множествами, называемые соответственно *абсолютной* и *относительной метриками*.

За величину абсолютной метрики принимается оптимальное значение целевой функции следующей задачи:

минимизировать κ (*по совокупности* κ *и всех* ξ_i, *где* $i = [1, n]$),

при условиях:

$$\kappa \geq 0\,,\; d_k \leq \xi_k \leq D_k\,, \quad k = [1, n]\,,$$

$$r_k - \kappa \leq \xi_k \leq R_k + \kappa\,, \quad k = [1, n]\,,$$

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki} \xi_i\,, \quad k = [2, n]\,.$$

Задача поиска величины относительной метрики имеет вид:
минимизировать κ (*по совокупности* κ *и всех* ξ_i, *где* $i = [1, n]$),
при условиях:

$$\kappa \geq 0 \,,\; d_k \leq \xi_k \leq D_k \,, \quad k = [1, n] \,,$$

$$r_k - \kappa \,| r_k | \leq x_k \leq R_k + \kappa \,| R_k | \,, \quad k = [1, n] \,, \qquad (7.1.4.2)$$

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki} \xi_i \,, \quad k = [2, n] \,.$$

Заметим, что из приведенного определения способа измерения метрики следует, что:

- при использовании относительной метрики ни одна из границ целевых диапазонов показателей модели не может иметь нулевого значения;
- как абсолютная, так и относительная метрики имеют смысл лишь для совместных состояний математической модели.

Группировка целевых границ

Используемая метрика обладает дефектной особенностью:

> для оптимального значения κ, значения некоторых показателей могут быть неединственными.

В этом случае для облечения процесса анализа множества условно допустимых состояний неполной математической модели применяется специальная процедура устраняющая этот дефект.

Эта процедура, называемая *группировкой границ целевых диапазонов*, заключается в последовательном решении задач нахождения величины метрики. На каждом шаге данной процедуры из условия задачи исключаются ограничения, содержащие переменную κ путем превращения ее в константу в тех активных неравенствах, которые определяют оптимальное значение метрики.

Процесс последовательной фиксации завершается, если:

- либо все ограничения, содержащие κ, оказались зафиксированными;
- либо на некотором шаге процедуры последовательной фиксации значение κ оказалось равным нулю.

В итоге процедура группировки выполняет разбиение множества желательных ограничений на группы (отсюда – ее название), каждая из которых обладает своей собственной количественной оценкой "близости" целей и возможностей. Для большей наглядности эти величины именуются "расстоянием".

Строго говоря, метрикой, определяющей расстояние между множествами допустимых и целевых состояний, является не значение переменной κ, а набор монотонно убывающих чисел $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots, \kappa_T$, где T есть число групп фиксации, каждой из которых соответствует свое расстояние до цели.

В качестве иллюстрации рассмотрим математическую модель с двумя показателями ξ_1 и ξ_2, диапазоны допустимых значений которых описывается условиями: $\begin{matrix} 0 \le \xi_1 \le 3, \\ 0 \le \xi_2 \le 5, \end{matrix}$ а множество целевых состояний – условиями: $\begin{matrix} 5 \le \xi_1 \le 11, \\ 6 \le \xi_2 \le 8, \end{matrix}$ тогда задача нахождения значения метрики принимает вид:

минимизировать κ *при условиях*:

$$\begin{aligned} &\kappa \ge 0, \\ &0 \le \xi_1 \le 3, \\ &0 \le \xi_2 \le 5, \\ &5 - \kappa \le \xi_1 \le 11 + \kappa, \\ &6 - \kappa \le \xi_2 \le 8 + \kappa . \end{aligned}$$

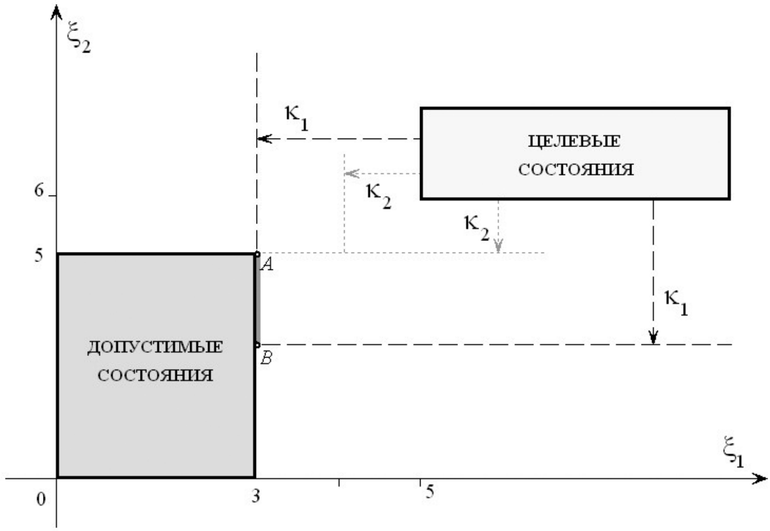

Рис. Процедура группировки целевых ограничений.

Эта задача легко решается графически, и из рис. мы находим очевидный ответ: $\kappa = 2$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = [4{,}5]$. Заметим, что переменная ξ_2 определяется в этом случае *неоднозначно.* Решение - отрезок *AB*.

На следующем шаге процедура группировки целевых границ требует замену переменной κ константой 2 в активных ограничениях задачи. Такое ограничение в рассматриваемом случае единственное: $5-\kappa \le \xi_1$. Выполнив данную подстановку, получаем, что на втором шаге процедуры необходимо решать задачу вида:

минимизировать κ *при условиях*:

$$\begin{aligned} &\kappa \ge 0, \\ &0 \le \xi_1 \le 3, \\ &0 \le \xi_2 \le 5, \\ &3 \le \xi_1 \le 11+\kappa, \\ &6-\kappa \le \xi_2 \le 8+\kappa . \end{aligned}$$

Решение и этой задачи также находится графически, оно имеет вид: $\kappa = 1$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = 5$.

Полученное решение определено однозначно, и поэтому процесс группировки закончен. В этом примере разбиение системы ограничений, описывающих множество целевых состояний на группы по их "удаленности" от множества допустимых состояний имеет следующий вид,

Группа	Расстояние до цели	Целевые ограничения в группе
1	2.	$5 - \kappa \le \xi_1$
2	1.	$6 - \kappa \le \xi_2$
0	0.	$\xi_1 \le 11 + \kappa, \quad \xi_2 \le 8 + \kappa$

ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

По исторически сложившимся причинам *задачей математического программирования* принято называть задачу поиска в E^n экстремума функции $F(x)$, на множестве элементов x удовлетворяющих условиям вида:

$$f_i(x) \geq 0 \, , \, i = [1, m] \, ,.$$

В координатной форме эта задача записывается:

Найти максимум $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ по $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$,

при условиях:

$$\begin{cases} f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \geq 0, \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \geq 0, \\ \qquad \ldots \\ f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \geq 0. \end{cases}$$

Поиск решения задачи математического программирования общего вида представляет собой в большинстве случаев чрезвычайно сложную вычислительную проблему. В связи с чем, представляется целесообразным выделение некоторых классов задач, для которых имеются практически эффективные инструментальные средства поиска и анализа их решений.

Задачи математического программирования с ограничениями типа «равенство»

В практически важном частном случае множество R может состоять из элементов E^n, удовлетворяющих системе уравнений вида

$$f_i(x) = 0; \forall i = [1, m].$$

Данную задачу в E^n принято называть задачей *поиска условного экстремума с ограничениями типа "равенство"*.

Удобная и применимая для достаточно широкого класса задач форма записи необходимых и достаточных условий существования условного экстремума основана на использовании *функции Лагранжа*

$$L(x,\Lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

Будем предполагать, что функционалы $F(x)$ и $f_i(x)$, $\forall i = [1,m]$ *непрерывно дифференцируемы*, а элементы $\operatorname{grad} f_i(x)$, $\forall i = [1,m]$ *линейно независимы* на экстремальном элементе x^*.

В методе множителей Лагранжа *необходимые* условия существования условного экстремума на элементе x^* будут иметь вид: существует Λ^* такое, что

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial \xi_j}\right|_{x = x^*,\ \Lambda = \Lambda^*} = 0\ ,\ \forall j = [1, n], \\ f_i(x^*) = 0\ , \qquad \forall i = [1, m]. \end{cases}$$

Иначе говоря, пара элементов $\{x^*, \Lambda^*\}$ является стационарной для $L(x, \Lambda)$ и удовлетворяет всем условиям связи

$$f_i(x^*) = 0\ ,\ \forall i = [1, m]\ .$$