Двойственные условия оптимальности в задачах математического программирования

Основным из этих условий является

Теорема (Каруша-Куна-Таккера) **Пусть функция** $F(x)$ **на множестве** R **принимает максимальное значение на элементе** x^* **и элементы** $\operatorname{grad} f_i(x^*), i \in J(x^*)$ **линейно независимы**. **Тогда существуют числа** λ_i^*, $\forall i = [1, m]$ **такие, что**

$$\operatorname{grad} F(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \operatorname{grad} f_i(x^*) = o;$$

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0; \;\; \lambda_i^* \geq 0; \;\; \forall i = [1, m].$$

Отметим также, что, равенства

$$\lambda_i^* f_i(x^*) = 0, \;\; \forall i = [1, m]$$

принято называть условиями *дополняющей нежесткости*.

Полученные выше необходимые условия экстремальности удобнее формулировать, введя в рассмотрение специальный функционал, зависящий как от x, так и от $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ и имеющий вид:

$$L(x, \Lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x).$$

В теории математического программирования числа $\lambda_i^* \geq 0$, $i = [1, m]$ принято называть *множителями Лагранжа*, а функционал $L(x, \Lambda)$ – *функцией Лагранжа*.

Функция Лагранжа и ее свойства

При исследовании свойств функции Лагранжа полезными оказываются следующие теоремы.

Теорема **Справедливо равенство**

$$\max_{x \in R} F(x) = \max_{x} \min_{\Lambda \geq o} L(x, \Lambda) \text{.}$$

Доказательство.

В силу неотрицательности чисел λ_i , $i = [1, m]$ и структуры функции Лагранжа справедливо равенство

$$\min_{\Lambda \geq o} L(x, \Lambda) = \left[\begin{array}{ll} F(x) & x \in R, \\ -\infty & x \notin R. \end{array} \right.$$

Тогда, если x^* – решение исходной задачи, то $x^* \in R$ и

$$F(x^*) = \max_{x \in R} F(x) = \max_{x} \min_{\Lambda \geq o} L(x, \Lambda).$$

Обратно: если x^* – оптимальный элемент функционала

$$\max_{x} \min_{\Lambda \geq o} L(x, \Lambda) \text{,}$$

то $x^* \in R$ и справедливо $\max_{x \in R} F(x) = \max_{x} \min_{\Lambda \geq o} L(x, \Lambda)$.

Теорема доказана.

Следствие **Задачи поиска $\max\limits_{x\in R} F(x)$ и $\max\limits_{x} \min\limits_{\Lambda\ge o} L(x,\Lambda)$ равносильны.**

Задачу поиска

$$\min_{\Lambda\ge o} \max_{x} L(x,\Lambda)$$

принято назвать *двойственной* к *прямой* задаче

$$\max_{x} \min_{\Lambda\ge o} L(x,\Lambda).$$

Теорема **Справедливо соотношение**

$$\min_{\Lambda\ge o} \max_{x} L(x,\Lambda) \ge \max_{x} \min_{\Lambda\ge o} L(x,\Lambda) .$$

Доказательство.

Очевидно, что $L(x,\Lambda) \ge \min\limits_{\Lambda\ge o} L(x,\Lambda)$.

Но тогда, как частный случай, верна оценка

$$\forall \Lambda \ge o: \; \max_{x} L(x,\Lambda) \ge \max_{x} \min_{\Lambda\ge o} L(x,\Lambda) ,$$

из которой следует, что

$$\min_{\Lambda\ge o} \max_{x} L(x,\Lambda) \ge \max_{x} \min_{\Lambda\ge o} L(x,\Lambda) .$$

Теорема доказана.

Доказанные выше теоремы справедливы без каких-либо предположений о выпуклости прямой задачи. Их утверждения позволяют получать в общем случае *верхнюю* оценку ее решения. Наложение же дополнительных условий, приводит к более сильным оценкам, таким как

Теорема **Пусть $F(x)$ *выпукла вверх* на *выпуклом* множестве R, имеющем внутренние элементы (условие регулярности Слейтера), тогда верны равенства**

$$\min_{\Lambda \geq o} \max_{x} L(x, \Lambda) = L(x^*, \Lambda^*) = \max_{x} \min_{\Lambda \geq o} L(x, \Lambda).$$

Двойственные условия оптимальности в линейном программировании

Для задач линейного программирования необходимые и достаточные условия оптимальности могут быть получены также и в альтернативной, двойственной форме (Каруша-Куна–Таккера), путем применения теоремы Фаркаша.

Однако, специфическая форма постановки задачи ЛП позволяет получить эти условия в виде *другой задачи линейного программирования*, сформулированной в двойственном (сопряженном) пространстве.

Напомним, что *прямая* задача формулируется как

$$\max_{x} \min_{\Lambda \geq o} L(x, \Lambda),$$

а *двойственная* ей задача имеет вид $\min\limits_{\Lambda \geq o} \max\limits_{x} L(x, \Lambda)$.

Рассмотрим следующую задачу ЛП:

найти максимум $\sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j$ *на* $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \in E^n$,

при условиях:

$$\xi_j \geq 0, \quad j = [1, n],$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \leq \beta_i, \quad i = [1, m]$$

Или же в символическом виде

Найти максимум (c, x) *на* $x \in E^n$,

при условиях: $x \geq o, \quad Ax \leq b$.

Функция Лагранжа для этой задачи будет иметь вид

$$L(x,\Lambda) = (c,x) + (\Lambda, b - Ax)$$

Для того, чтобы получить стандартную формулировку двойственной задачи, преобразуем функцию Лагранжа к виду

$$L(x,\Lambda) = (\Lambda, b) + (c - A^{\mathrm{T}}\Lambda, x).$$

Решение задачи $\max\limits_{x} L(x,\Lambda)$ в силу условия $x \geq 0$ имеет вид:

$$\max_{x} L(x,\Lambda) = \left[\begin{array}{l} (\Lambda, b),\ \text{если } c - A^{\mathrm{T}}\Lambda \leq o, \\ +\infty,\ \ \text{если } c - A^{\mathrm{T}}\Lambda > o. \end{array}\right.$$

Поэтому двойственная задача $\min\limits_{\Lambda \geq o} \max\limits_{x} L(x,\Lambda)$ будет иметь следующую формулировку:

Найти минимум (Λ, b) *по* $\Lambda \in E^m$,
при условиях: $A^{\mathrm{T}}\Lambda \geq c$, $\Lambda \geq o$.

или в координатной форме:

$$\text{\textit{найти минимум}} \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i \quad \text{\textit{на}} \quad \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \in E^m ,$$

$$\text{\textit{при условиях}:} \quad \lambda_i \geq 0 ; \quad i = [1, m],$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \geq \sigma_j , \quad j = [1, n].$$

Преимуществом такой записи прямой задачи линейного программирования является *симметричность* форм записи прямой и двойственной задач.

При этом стоит отметить, что переменные прямой задачи не входят в постановку двойственной только в *линейном* случае.