

## МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

### Описание алгоритма

Метод штрафных функций в значительном числе случаев считается наиболее подходящим средством решения задач математического программирования алгоритмом, хотя и обладающим рядом свойств, ограничивающих его применение.

Будем считать, что решаемая задача математического программирования имеет вид

$$\begin{aligned} & \text{найти максимум } F(x) \text{ по } x \in E^n, \\ & \text{при условиях: } f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = [1, m] \end{aligned}$$

Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

Идея метода штрафных функций, использованная впервые Р. Курантом в 1943 году, заключается в том, что вместо исходной задачи математического программирования решается *серия задач* поиска экстремума специальной вспомогательной функции *без каких-либо ограничений на*  $x \in E^n$ .

Эта вспомогательная функция, которую будем обозначать  $A(\tau, x)$ , выбирается равной целевой функции исходной задачи  $F(x)$ , из которой вычитаются слагаемые  $P(\tau, f_i(x))$ , "штрафующие" нарушение каждого из условий  $f_i(x) \leq 0 \quad i = [1, m]$ .

Механизм штрафа заключается в том, что этот штраф мал, если соответствующее ограничение не нарушено, и велик по модулю, если  $f_i(x) > 0 \quad i = [1, m]$  на элементе  $x$ .

Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

При использовании метода штрафных функций предполагается, что добавка (*штрафная функция*)  $P(\tau, s)$ , где  $\tau > 0$  – *параметр (коэффициент штрафа)*, штрафующая нарушение ограничения вида  $s \leq 0$ , удовлетворяет при каждом фиксированном значении  $s$  предельному соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ +\infty, & s > 0. \end{cases} \quad (1)$$

При этом поиск максимума вспомогательной функции осуществляется при *фиксированном* значении параметра  $\tau$ , однако его значение можно менять и использовать  $\tau$  как регулятор меры штрафа за "единицу нарушения ограничения".

Тогда вспомогательная функция  $A(\tau, x)$  для исходной задачи будет иметь вид

$$A(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x)) .$$

Примерами штрафных функций могут служить

$$P(\tau, s) = \begin{cases} 0, & \text{при } s \leq 0, \\ \frac{s^2}{2\tau}, & \text{при } s > 0, \end{cases} \quad P(\tau, s) = \begin{cases} -\tau \ln(-s), & \text{при } s < 0, \\ +\infty, & \text{при } s \geq 0, \end{cases}$$

или

$$P(\tau, s) = \exp\left(\frac{s}{\tau}\right), \quad P(\tau, s) = \tau \exp\left(\frac{s}{\tau}\right).$$

графики двух из них показаны на рис. 1 и на рис 2

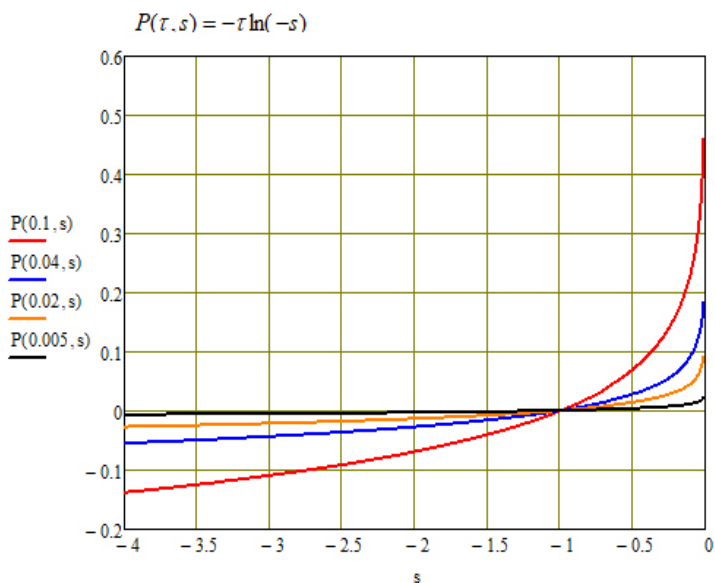


Рис. 1.

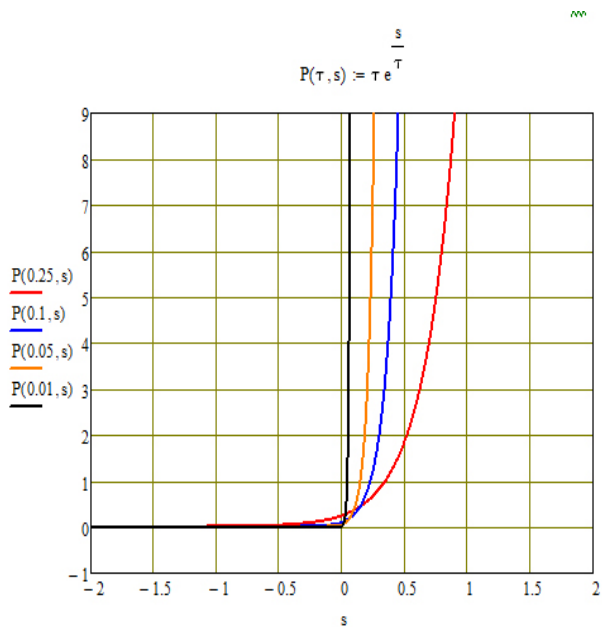


Рис. 2.

Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

Для задачи

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } e^{\xi}, \\ & \text{при условии } \xi \leq 1 \end{aligned}$$

со штрафной функцией  $P(\tau, s) = \frac{(s + |s|)^2}{8\tau}$  графики вспомогательной функции

$$A(\tau, \xi) = e^{\xi} - \frac{1}{8\tau} (-1 + \xi + |-1 + \xi|)^2$$

при различных значениях  $\tau$ , показаны на рис.1.

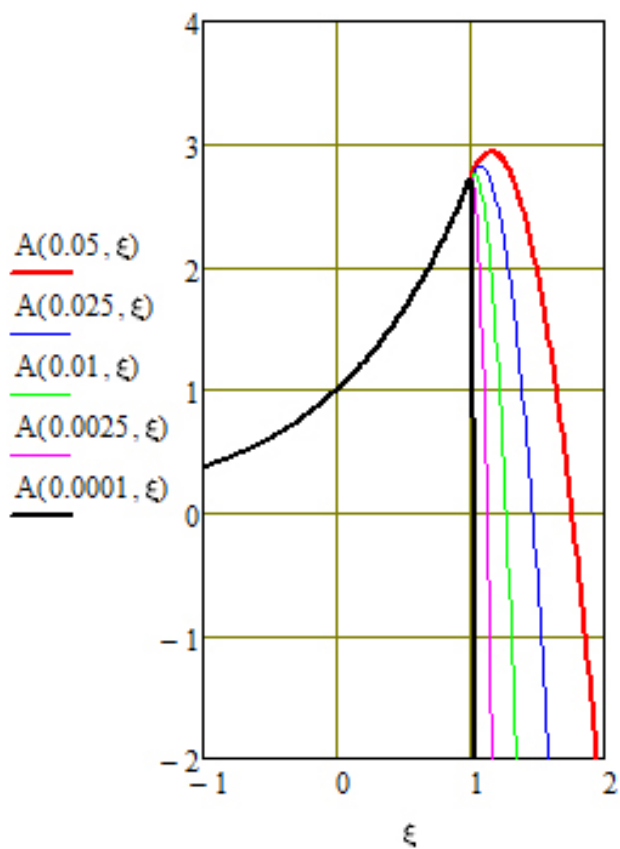


Рис. 3.



Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

Рассмотрим еще два примера, для которых приведем лишь графики вспомогательных функций (аналитические решения найдите самостоятельно)

$$\begin{aligned} & \text{максимизировать } (\xi - 1)^2, \\ & \text{при условии } 0 \leq \xi \leq 3 \end{aligned}$$

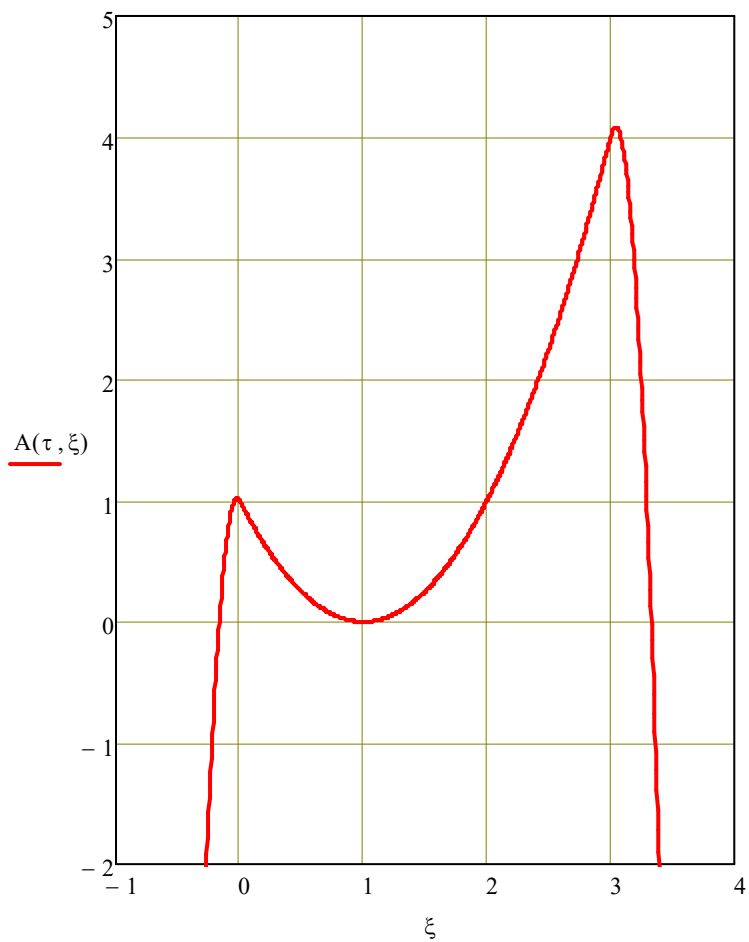
со штрафной функцией  $P(\tau, s) = \frac{(s + |s|)^2}{8\tau}$

В этой задаче вспомогательную функцию удобнее записать в такой форме

$$P(\tau, \xi) = \begin{cases} (\xi - 1)^2 - \frac{\xi^2}{2\tau} & \text{при } \xi \leq 0, \\ (\xi - 1)^2 & \text{при } 0 < \xi < 3, \\ (\xi - 1)^2 - \frac{(\xi - 3)^2}{2\tau} & \text{при } \xi \geq 3. \end{cases}$$

$$\tau = 0.01$$

$$A(\tau, \xi) := (\xi - 1)^2 - P(\tau, -\xi) - P(\tau, \xi - 3)$$



Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

и задачу

$$\begin{array}{l} \text{максимизировать} \quad \xi, \\ \text{при условии} \quad 0 \leq \xi \leq 2 \end{array}$$

со штрафной функцией  $P(\tau, s) = -\tau \ln(-s)$

Здесь вспомогательная функция будет иметь вид

$$P(\tau, \xi) = \xi + \tau \ln \xi + \tau \ln(2 - \xi).$$

$$P(\tau, s) := -\tau \cdot \ln(-s)$$

$$A(\tau, \xi) := \xi - P(\tau, -\xi) - P(\tau, \xi - 2)$$



## Проблема точности

При использовании метода гладких штрафных функций возникает так называемая проблема точности. Поясним суть этой проблемы на следующем примере.

Рассмотрим задачу: *найти максимум*  $3\xi_1 + 2\xi_2$  на  $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$ ,  
при условиях: 
$$\begin{cases} \xi_1 \leq 2, \\ \xi_2 \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

В качестве штрафной функции (1) выберем  $P(\tau, s) = \tau e^{\frac{s}{\tau}}$ , тогда вспомогательная функция будет иметь вид (см. рис. 3)

$$A(\tau, \xi_1, \xi_2) = 3\xi_1 + 2\xi_2 - \tau e^{\frac{-2 + \xi_1}{\tau}} - \tau e^{\frac{-1 + \xi_2}{\tau}},$$

Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

условия стационарности на элементе  $\|\bar{x}\| = \left\| \begin{matrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{matrix} \right\|$  которой:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}_1} = 3 - e^{\frac{\bar{\xi}_1 - 2}{\tau}} = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \bar{\xi}_2} = 2 - e^{\frac{\bar{\xi}_2 - 1}{\tau}} = 0. \end{cases}$$

Откуда находим, что

$$\bar{\xi}_1(\tau) = 2 + \tau \ln 3 \quad \text{и} \quad \bar{\xi}_2(\tau) = 1 + \tau \ln 2,$$

и, следовательно,

$$\xi_1^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_1(\tau) = 2; \quad \xi_2^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\xi}_2(\tau) = 1,$$

а точное экстремальное значение функционала на этом элементе равно 8. Таким образом, для данной задачи метод штрафных функций дает решение с погрешностью порядка величины параметра  $\tau$ .

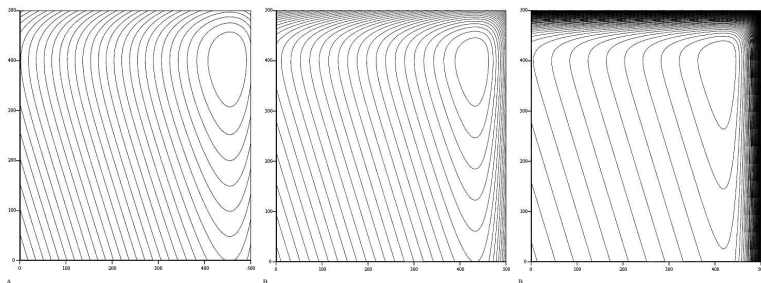


Рис. 2.

На рис. 2 приведены системы изолиний вспомогательной функции для задачи (2) при значениях коэффициента штрафа

$$\tau = 0.5, \tau = 0.3 \text{ и } \tau = 0.17.$$

Поскольку густота изолиний пропорциональна норме градиента, то данный рисунок наглядно демонстрирует увеличение "штрафа" за нарушение ограничений при  $\tau \rightarrow +0$ .

Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

Таким образом, решение задачи математического программирования

$$\begin{aligned} & \text{найти максимум } F(x) \text{ по } x \in E^n, \\ & \text{при условиях: } f_i(x) \leq 0, \forall i = [1, m] \end{aligned} \quad (3)$$

сводится к максимизации вспомогательной функции

$$A(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^m P(\tau, f_i(x))$$

без каких-либо ограничений.

Элемент  $\bar{x}(\tau)$ , на котором вспомогательная функция  $A(\tau, x)$  достигает своего максимума, является приближенным решением задачи (3), причем величина погрешности будет стремиться к нулю при  $\tau \rightarrow +0$ .

Иначе говоря, в силу (1), для *любой* числовой последовательности положительных чисел  $\{\tau_k\} \rightarrow +0$  при  $k \rightarrow +\infty, k \in N$ , будут выполняться предельные равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} A(\tau_k, \bar{x}(\tau_k)) &= F(x^*), \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}(\tau_k) &= x^*, \end{aligned}$$

где  $\bar{x}(\tau_k)$  – экстремальный по  $x$  элемент функционала  $A(\tau, x)$  при фиксированном, положительном значении параметра  $\tau = \tau_k$ .



Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

Если достаточно гладкая штрафная функция удовлетворяет также и неравенствам

$$\frac{\partial P}{\partial s} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0 \quad \forall s,$$

то, можно показать, что указанные предельные соотношения равносильны условиям

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +0} A(\tau, \bar{x}(\tau)) &= F(x^*), \\ \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) &= x^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

Если  $A(\tau, x)$  достаточно гладкая в  $E^n$  функция, имеющая при фиксированном  $\tau > 0$  изолированную точку локального максимума  $\bar{x}(\tau)$ , то неявно заданная функция  $\bar{x}(\tau)$  определяется равенством:

$$\text{grad}_x A(\tau, \bar{x}(\tau)) = 0. \quad (5)$$

Координатное представление последнего равенства будет иметь вид:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_k} = 0 \quad \forall k = [1, n],$$

## Проблема сходимости

Отмеченную выше проблему погрешности можно, казалось бы, легко решить, используя (4), то есть, полагая значение коэффициента штрафа в процедуре максимизации вспомогательной функции достаточно малым.

Однако, следующий пример наглядно демонстрирует возникающие при этом осложнения.

Пусть требуется решить задачу математического программирования:

найти минимум  $F(x) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2$  по  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ ,  
при условиях:

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + \xi_2 &= 3, \\ \xi_1 + 3\xi_3 &= 4. \end{aligned} \tag{6}.$$

Как было сказано, метод штрафных функций заключается в замене исходной задачи на поиск условного экстремума последовательностью задач без ограничений, экстремальные элементы которых сходятся к решению исходной задачи.

Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

Функцию штрафа выберем  $P(\tau, s) = \frac{s^2}{2\tau}$ , тогда вспомогательный функционал для рассматриваемой демонстрационной задачи будет иметь вид

$$A(\tau, x) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 3\xi_3^2 + \frac{(2\xi_1 + \xi_2 - 3)^2}{2\tau} + \frac{(\xi_1 + 3\xi_3 - 4)^2}{2\tau}.$$

Соответственно, условия его стационарности по  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  на элементе  $\bar{x}(\tau)$  будут

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} = 2\bar{\xi}_1 + \frac{2(2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 3)}{\tau} + \frac{\bar{\xi}_1 + 3\bar{\xi}_3 - 4}{\tau} = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \xi_2} = 4\bar{\xi}_2 + \frac{2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 - 3}{\tau} = 0, \\ \frac{\partial A}{\partial \xi_3} = 6\bar{\xi}_3 + \frac{3(\bar{\xi}_1 + 3\bar{\xi}_3 - 4)}{\tau} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (5 + 2\tau)\bar{\xi}_1 & + 2\bar{\xi}_2 & + 3\bar{\xi}_3 = 10, \\ 2\bar{\xi}_1 + (1 + 4\tau)\bar{\xi}_2 & & = 3, \\ \bar{\xi}_1 & + (3 + \tau)\bar{\xi}_3 = 4. \end{cases} \quad (7)$$

Отметим, что переход к пределу при  $\tau \rightarrow +0$  здесь невозможен, ибо в этом случае основная матрица системы вырождается.

Более того, чем меньше значение положительного параметра штрафа  $\tau$ , тем ближе к нулю детерминант основной матрицы этой системы и тем значительнее вычислительные затруднения при ее решении – в первую очередь необходимость повышения точности вычислений, например, при использовании теоремы Крамера или метода Гаусса.

Ос. сем 2022/23 уч. г. Гр. Б03-101.

Преодолеть эти затруднения можно, используя формулу Тейлора. Из системы линейных уравнений (7) найдем  $\bar{\xi}_1(\tau)$ , подставив выражения для  $\bar{\xi}_2(\tau)$  и  $\bar{\xi}_3(\tau)$  через  $\bar{\xi}_1(\tau)$  в первое уравнение. Тогда

$$(5 + 2\tau)\bar{\xi}_1 + 2\frac{3 - 2\bar{\xi}_1}{1 + 4\tau} + 3\frac{4 - \bar{\xi}_1}{3 + \tau} = 10,$$

что для  $\bar{\xi}_1(\tau)$  дает

$$\bar{\xi}_1(\tau) = \frac{\frac{80}{3}\tau + o(\tau)}{\frac{56}{3}\tau + o(\tau)} \quad \text{или} \quad \bar{\xi}_1(\tau) = \frac{10 + \frac{o(\tau)}{\tau}}{7 + \frac{o(\tau)}{\tau}} = \frac{10}{7} + \frac{o(\tau)}{\tau}.$$

И вот теперь, переходя к пределу при  $\tau \rightarrow +0$ , получаем, что

$$\xi_1^* = \frac{10}{7}. \text{ Аналогично находим, что } \xi_2^* = \frac{1}{7} \text{ и } \xi_3^* = \frac{6}{7}.$$

## Линейная экстраполяция

Чтобы оценить порядок величины вносимой погрешности рассмотрим разложение функции  $\bar{x}(\tau)$  по формуле Тейлора в окрестности некоторого  $\tau > 0$  до  $o(\Delta\tau)$ :

$$\bar{x}(\tau + \Delta\tau) = \bar{x}(\tau) + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \Delta\tau + o(\Delta\tau),$$

из которого следует оценка при  $\Delta\tau \rightarrow -\tau$  сверху:

$$\bar{x}(0) = \bar{x}(\tau) - \frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \tau + o(\tau). \quad (8)$$

Последнее соотношение означает, что погрешность метода по порядку малости будет совпадать с  $\tau$  при условии, что вектор-функция  $\bar{x}(\tau)$  непрерывно дифференцируема по  $\tau$ .

С другой стороны, вектор-функция  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \tau$  в формуле (8) может рассматриваться как корректирующая поправка, уменьшающая порядок погрешности, вносимой методом гладких штрафных функций. Компоненты этой вектор-функции являются решением следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial \bar{F}_i}{\partial \tau} = - \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_j \partial \tau} \quad \forall j = [1, n],$$

получаемой дифференцированием соотношений (5) по параметру  $\tau$ .