МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Описание метода

Метод штрафных функций является одним из наиболее эффективным алгоритмом решения задач математического .

Идея этого метода, сформулированная впервые Курантом в 1942 году, заключается в том, что вместо исходной задачи математического программирования решается задача поиска экстремума специальной вспомогательной функции *без каких-либо ограничений на* $x \in E^n$.

Эта вспомогательная функция, которую будем обозначать $A(\tau, x)$, выбирается равной целевой функции исходной задачи $F(x)$, к которой добавлены слагаемые $P(\tau, s)$, "штрафующие" нарушение каждого из условий $f_i(x) \leq 0$, $i = [1, m]$.

"Штраф" определяется так, чтобы добавка мала, если соответствующее ограничение не нарушено, но отрицательна и велика по модулю, если $f_i(x) < 0$, $i = [1, m]$ на элементе x.

Например, можно потребовать, чтобы добавка $P(\tau, s)$, где $\tau > 0$ – некоторый параметр, штрафующая нарушение ограничения вида $s \le 0$, удовлетворяет при каждом фиксированном значении s предельному соотношению

$$\lim_{\tau \to +0} P(\tau, s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ +\infty, & s > 0. \end{cases}$$

При этом поиск максимума вспомогательного функционала осуществляется при *фиксированном* значении параметра τ, однако его значение можно менять и использовать τ как регулятор меры штрафа за "единицу нарушения ограничения".

Обычно $P(\tau, s)$ называют *штрафной функцией*, а параметр τ – *коэффициентом штрафа*.

Таким образом, решение задачи математического программирования

найти максимум $F(x)$ по $x \in E^n$,

при условиях: $f_i(x) \geq 0, \forall i = [1, m]$

сводится к максимизации вспомогательной функции

$$A(\tau, x) = F(x) - \sum_{i=1}^{m} P(\tau, f_i(x))$$

без каких-либо ограничений.

Элемент $\overline{x}(\tau)$, на котором вспомогательная функция $A(\tau, x)$ достигает своего максимума, является приближенным решением задачи, причем величина погрешности будет стремиться к нулю при $\tau \to +0$.

Можно показать, что, если достаточно гладкая штрафная функция $P(r,s)$ удовлетворяет также и неравенствам

$$\frac{\partial P}{\partial s} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0, \forall s,$$

то справедливы равенства

$$\lim_{\tau \to +0} A(\tau, \bar{x}(\tau)) = F(x^*), \qquad \lim_{\tau \to +0} \bar{x}(\tau) = x^*.$$

Демонстрационный пример

Пример 01: Найти максимум $3\xi_1 + 2\xi_2$ на $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$, при условиях: $\begin{cases} \xi_1 \le 2, \\ \xi_2 \le 1. \end{cases}$

Решение. В качестве штрафной функции выберем $P(\tau, s) = \tau e^{\frac{s}{\tau}}$, тогда вспомогательная функция будет иметь вид

$$A(\tau, \xi_1, \xi_2) = 3\xi_1 + 2\xi_2 - \tau e^{\frac{\xi_1 - 2}{\tau}} - \tau e^{\frac{\xi_2 - 1}{\tau}},$$

условия стационарности на элементе $\| \bar{x} \| = \left\| \begin{matrix} \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \end{matrix} \right\|$ которой:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial \xi_1} = 3 - e^{\frac{\bar{\xi}_1 - 2}{\tau}} = 0, \\ \dfrac{\partial A}{\partial \xi_2} = 2 - e^{\frac{\bar{\xi}_2 - 1}{\tau}} = 0. \end{cases}$$

Откуда находим, что

$$\bar{\xi}_1(\tau) = 2 - \tau \ln 3 \quad \text{и}$$

$$\bar{\xi}_2(\tau) = 1 - \tau \ln 2,$$

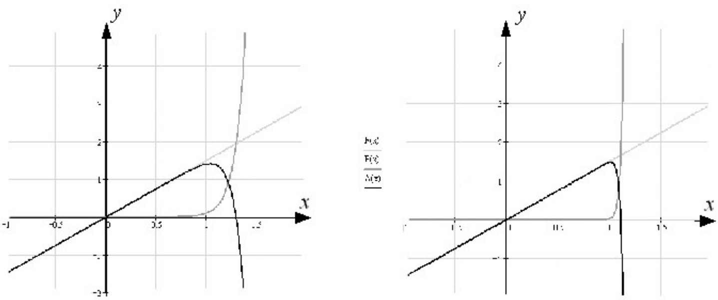
и, следовательно,

$$\xi_1^* = \lim_{\tau \to +0} \bar{\xi}_1(\tau) = 2; \quad \xi_2^* = \lim_{\tau \to +0} \bar{\xi}_2(\tau) = 1,$$

а точное экстремальное значение функционала на этом элементе равно 8.

Таким образом, для данной задачи метод штрафных функций дает решение с погрешностью порядка величины параметра τ.

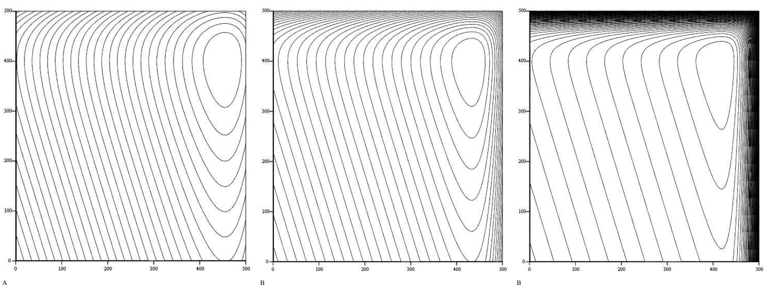
Следующий рисунок иллюстрирует изменение вида вспомогательной функции при уменьшении коэффициента штрафа.



$\tau = 0.1$ $\tau = 0.025$

На следующем рисунке приведены системы изолиний вспомогательного функционала для значений коэффициента штрафа

$$\tau = 0.5\,,\ \tau = 0.3\ \text{ и }\ \tau = 0.17\,.$$



Линейная экстраполяция в методе штрафных функций

Если $A(\tau, x)$ достаточно гладкая в E^n функция, то *вектор-функция* $\overline{x}(\tau)$ неявно определяется равенством:

$$\operatorname{grad}_x A(\tau, \overline{x}(\tau)) = o .$$

Координатное представление последнего равенства будет иметь вид: $\dfrac{\partial A}{\partial \xi_k} = 0$, $\forall k = [1, n]$,

Чтобы оценить порядок величины погрешности метода штрафных функций, рассмотрим разложение функции $\overline{x}(\tau)$ по формуле Тейлора в окрестности некоторого $\tau > 0$ до $\mathrm{o}(\Delta\tau)$:

$$\overline{x}(\tau + \Delta\tau) = \overline{x}(\tau) + \frac{\partial \overline{x}}{\partial \tau}\Delta\tau + \mathrm{o}(\Delta\tau),$$

из которого следует оценка при $\Delta\tau \to -\tau$:

$$\overline{x}(0) = \overline{x}(\tau) - \frac{\partial \overline{x}}{\partial \tau}\tau + \mathrm{o}(\tau).$$

Согласно *теореме о неявных функциях*, компоненты элемента $\dfrac{d\overline{x}(\tau)}{d\tau}$ могут быть найдены из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_k \partial \xi_j} \frac{d\overline{\xi}_j}{d\tau} = -\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_k \partial \tau}, \ \forall k = [1, n].$$

получаемой дифференцированием условий стационарности вспомогательной функции по параметру τ.

Связь с методом множителей Лагранжа

Из предположения о непрерывной дифференцируемости штрафной функции следует существование пределов

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\partial P(\bar{x}(\tau))}{\partial f_i}, \quad \forall i=[1,m].$$

Если теперь сопоставить условие $\operatorname{grad}_x A(\tau,\bar{x}(\tau))=o$, записанное для задачи на минимум в форме

$$\operatorname{grad} F(x)+\sum_{i=1}^{m}\Bigl(-\frac{\partial P}{\partial f_i}\Bigr)\operatorname{grad} f_i = o$$

с утверждением теоремы Каруша-Куна–Таккера, то в силу существования и единственности множителей Лагранжа λ_i^*, $\forall i=[1,m]$, можно прийти к заключению, что для изолированного локального решения x^* справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\partial P(\bar{x}(\tau))}{\partial f_i}=-\lambda_i^* \quad \forall i=[1,m]$$

Иначе говоря, пределы вида $\lim\limits_{\tau \to +0} \dfrac{\partial P(\bar{x}(\tau))}{\partial f_i}$ совпадают со значениями множителей Лагранжа на оптимальном элементе, когда последние существуют и единственны.

Следовательно, величины $\dfrac{\partial P(\bar{x}(\tau))}{\partial f_i}$ можно использовать для оценки величин множителей Лагранжа.

Пример 2. В качестве примера рассмотрим задачу, двойственную к задаче примера 1

$$\textit{найти минимум } 2\lambda_1 + \lambda_2, \textit{ при условиях}: \begin{cases} \lambda_1 \geq 3, \\ \lambda_2 \geq 2, \end{cases}$$

решение которой $\begin{cases} \lambda_1^* = 3, \\ \lambda_2^* = 2, \end{cases}$ можно выразить также и при помощи предельных соотношений

$$\begin{cases} \lim\limits_{\tau \to +0} e^{-\frac{\overline{\xi}_1(\tau) - 2}{\tau}} = 3, \\ \lim\limits_{\tau \to +0} e^{-\frac{\overline{\xi}_2(\tau) - 1}{\tau}} = 2 \end{cases}$$

с экстремальным значением двойственного функционала

$$2\lambda_1^* + \lambda_2^* = 8.$$

Примеры использования штрафных функций

Пример 3. Решить задачу линейного программирования:

максимизировать по x функцию $3x$

при условии $x \le 2$,

используя *барьерную* (то есть, препятствующую нарушению условия $s \le 0$) штрафную функцию вида $P(\tau, s) = \begin{cases} \tau \ln(-s) & \text{при } s < 0, \\ -\infty & \text{при } s \ge 0. \end{cases}$

Решение: 1. Построим вспомогательную функцию

$$A(\tau, x) = 3x + \tau \ln(2 - x)$$

и найдем ее экстремум.

2. Условие стационарности для нее будет

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 3 - \frac{\tau}{2 - \bar{x}} = 0 .$$

Откуда $\bar{x}(\tau) = 2 - \frac{\tau}{3} \to 2$ при $\tau \to +0$.

3. Поскольку $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{\tau}{(\bar{x} - 2)^2} < 0$, то это максимум.

Пример 4. Решить задачу:

максимизировать по x

функцию $(x-2)^2$,

при условиях $1 \le x \le 4$,

используя в качестве штрафа за нарушение условия $s \le 0$, штрафную функцию *внешнего типа* $P(\tau, s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s < 0, \\ \dfrac{s^2}{2\tau} & \text{при } s \ge 0. \end{cases}$

Решение: 1. Вспомогательная функция в данном случае будет иметь вид

$$P(\tau, s) = \begin{cases} (x-2)^2 - \dfrac{(1-x)^2}{2\tau} & \text{при } x \le 1, \\ (x-2)^2 & \text{при } 1 < x < 4, \\ (x-2)^2 - \dfrac{(x-4)^2}{2\tau} & \text{при } x \ge 4. \end{cases}$$

2. Найдем ее стационарные точки для каждого из промежутков поотдельности.

Во-первых, при $1 < s < 4$ стационарная точка $x = 2$ единственная и, очевидно, что это локальный минимум (то есть, это - не решение).

При $s \le 1$ условие стационарности будет

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2(\bar{x} - 2) + \frac{1 - \bar{x}}{\tau} = 0,$$

что дает $\bar{x}(\tau) = \dfrac{1 - 4\tau}{1 - 2\tau} \to 1 - 0$ при $\tau \to +0$.

А, поскольку $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 2 - \dfrac{1}{\tau} < 0$ при малых положительных τ, то это - локальный максимум и, значит, решение.

Наконец, при $s \ge 4$ условие стационарности имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2(\bar{x} - 2) - \frac{\bar{x} - 4}{\tau} = 0,$$

откуда получаем

$$\bar{x}(\tau) = 4\frac{1 - \tau}{1 - 2\tau} = 4\left(1 + \frac{\tau}{1 - 2\tau}\right) \to 4 + 0 \text{ при } \tau \to +0.$$

Как и в предыдущем случае, $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 4 - \dfrac{1}{\tau} < 0$ при малых положительных τ. Следовательно, это - локальный максимум, то есть, решение.

Пример 5. Решить методом штрафных функций задачу: максимизировать по x функцию $2x$, при условиях $x \ge 0, \quad x \le u \quad \forall u \in \mathbf{R}$.

Решение: 1. Вначале заметим, что решение как решение задачи математического программирования очевидно:

$$x_u^* = \begin{cases} u & \text{при } u \ge 0, \\ \text{не существует} & \text{при } u < 0. \end{cases}$$

2. Пусть штрафная функция $P(\tau, s) = \tau e^{\frac{s}{\tau}}$. Тогда вспомогательная функция будет

$$A(\tau, x, u) = 2x - \tau e^{-\frac{x}{\tau}} - \tau e^{\frac{x-u}{\tau}}.$$

А условие стационарности этой функции по x имеет вид:

$$\frac{\partial A}{\partial x}=0 \qquad \Rightarrow \qquad 2+e^{-\frac{\bar{x}(u)}{\tau}}-e^{\frac{\bar{x}(u)-u}{\tau}}=0 \ .$$

Введем обозначения: $y=e^{\frac{\bar{x}(u)}{\tau}}$, $a=e^{\frac{-u}{\tau}}$. Тогда уравнение примет вид: $y^2-2ay-a=0$. Его решение

$$y=a+\sqrt{a^2+a} \quad \text{или}$$

$$e^{\frac{\bar{x}(u)}{\tau}}=e^{\frac{u}{\tau}}(1+\sqrt{1+e^{\frac{-u}{\tau}}}) \ .$$

Откуда $\bar{x}(u)=u+\tau\ln(1+\sqrt{1+e^{\frac{-u}{\tau}}})$.

3. Полученное решение имеет смысл $\forall u\in\mathbf{R}$. При $u\to+\infty$ получаем асимптотическую оценку решения $\bar{x}(u)\approx u$. А при $u\to-\infty$ оценку $\bar{x}(u)\approx\frac{u}{2}$.