Метод функций обратных связей для задач линейного программирования

Вначале рассмотрим использование предлагаемого подхода для решения пары взаимно двойственных задач *линейного* программирования, записанных в *симметричной* форме.

Пусть векторы $x \in E^n$ и $\Lambda \in E^m$, имеющие координатные представления (столбцы) вида $||x|| = ||\ \xi_1\, \xi_2\ \ldots\ \xi_n\ ||^{\mathrm{T}}$ и $||\Lambda|| = ||\ \lambda_1\, \lambda_2\ \ldots\ \lambda_m\ ||^{\mathrm{T}}$, являются искомыми соответственно для пары задач вида:

1. *Прямой* задачи линейного программирования, т.е.:

$$\text{максимизировать по } \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \text{ функцию } F(x) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \xi_j$$

$$\text{при условиях } \ \xi_j \geq 0 \ \ \forall j = [1, n], \qquad f_i(x) = -\beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_j \leq 0 \ \ \ \forall i = [1, m]. \tag{2.1}$$

Любое решение задачи (2.1) обозначим через x^*, а $F(x^*)$ через F^*.

2. *Двойственной* задачи линейного программирования, т.е.:

$$\text{минимизировать по } \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \text{ функцию } G(\Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \lambda_i$$

$$\text{при условиях} \lambda_i \geq 0 \ \ \forall i = [1, m], \qquad g_j(\Lambda) = -\sigma_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \lambda_i \geq 0 \ \ \ \forall j = [1, n]. \tag{2.2}$$

Ее решение будем обозначать Λ^* и пусть $G^* = G(\Lambda^*)$.

Пусть задачи (2.1) и (2.2) решаются методом гладких штрафных функций, в котором используются вспомогательные функции вида

$$\begin{aligned} A_P(\tau,x) &= F(x) - \sum_{i=1}^{m} P\big(\tau, \quad f_i(x)\big) - \sum_{j=1}^{n} P\big(\tau,(-\xi_j)\big) \\ A_D(\tau,\Lambda) &= G(\Lambda) + \sum_{j=1}^{n} P\big(\tau,-g_j(\Lambda)\big) + \sum_{i=1}^{m} P\big(\tau,(-\lambda_i)\big), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где функция $P(\tau,s)$ определяет «штраф» за нарушение ограничения $s \le 0$ и удовлетворяет условиям

1. $\forall s$ и $\forall \tau > 0\ :\ P(\tau,s) \ge 0$ и $\lim\limits_{\tau\to+0} P(\tau,s) = \begin{cases} +\infty, & s > 0\,, \\ 0, & s < 0\,, \end{cases}$
2. Функция $P(\tau,s)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно.

(2.4)

3. Для всех $\tau > 0$ и $\forall s$ выполнены неравенства $\dfrac{\partial P}{\partial s} > 0\ ;\quad \dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0\ .$

Пусть
$$\operatorname*{grad}_x A_{\mathrm{P}}\bigl(\tau, \tilde{x}(\tau)\bigr) = o \qquad \text{и} \qquad \operatorname*{grad}_\Lambda A_{\mathrm{D}}\bigl(\tau, \breve{\Lambda}(\tau)\bigr) = o, \tag{2.5}$$
Тогда величины $F\bigl(\tilde{x}(\tau)\bigr)$ и $G\bigl(\breve{\Lambda}(\tau)\bigr)$, где точки $\tilde{x}(\tau)$ и $\breve{\Lambda}(\tau)$ являются стационарными для вспомогательных функций (2.3) $\quad \forall \tau > 0, \quad$ и, в силу основного свойства метода штрафных функций, их можно использовать в качестве аппроксимаций значений $F(x^*)$ и $G(\Lambda^*)$.

При этом, к условиям стационарности функций (2.5): применима теорема о неявных функциях, в силу чего вектор-функции $\tilde{x}(\tau)$ и $\breve{\Lambda}(\tau)$ могут рассматриваться как неявно определяемые уравнениями (2.5).

Наконец, как известно, по свойству взаимодвойственных задач (2.1), (2.2) компоненты вектора x^* являются множителями Лагранжа для задачи (2.2), а компоненты вектора Λ^* суть множители Лагранжа в задаче (2.1).

Заметим, что при каждом фиксированном $\tau > 0$, вообще говоря, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial f_i}\Big(\tau, f_i(\tilde{x}(\tau))\Big) \neq \breve{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m] \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial P}{\partial g_j}\Big(\tau, -g_j(\breve{\Lambda}(\tau))\Big) \neq \tilde{\xi}_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n]\,.$$

Эти соотношения оказываются верными равенствами лишь в пределе при $\tau \to +0$.

Здесь можно предположить, что существуют вектор-функции $\overline{x}(\tau)$ и $\overline{\Lambda}(\tau)$, являющиеся решениями системы уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \overline{\lambda}_i(\tau) & = & \dfrac{\partial P}{\partial s}\Big(\tau, \quad f_i(\overline{x}(\tau))\Big) & \qquad \forall i = [1, m]\,, \\ \overline{\xi}_j(\tau) & = & \dfrac{\partial P}{\partial s}\Big(\tau, -g_j(\overline{\Lambda}(\tau))\Big) & \qquad \forall j = [1, n]\,. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Напомним, что в случае совместности задач (2.1), (2.2)) верны соотношения:

$$\lim_{\tau \to +0} F\big(\overline{x}(\tau)\big) = F^*$$

и

$$\lim_{\tau \to +0} G\big(\overline{\Lambda}(\tau)\big) = G^*\,,$$

а в регулярном случае (т.е. при единственности x^* и Λ^*) кроме того, и равенства:

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \to +0} \frac{\partial P}{\partial f_i}\Big(\tau, f_i(\overline{x}(\tau))\Big) \quad \forall i = [1, m]\,,$$

$$\xi_j^* = \lim_{\tau \to +0} \frac{\partial P}{\partial g_j}\Big(\tau, -g_j(\overline{\Lambda}(\tau))\Big) \quad \forall j = [1, n]\,.$$

Тогда вектор-функции $\overline{x}(\tau)$ и $\overline{\Lambda}(\tau)$, наряду с $\tilde{x}(\tau)$ и $\breve{\Lambda}(\tau)$, можно было бы использовать в качестве оценочных аппроксимаций решений задач (2.1) и (2.2).

Заметим, что система (2.6) также может быть записана

$$\begin{cases} f_i\big(\tau, \overline{x}(\tau)\big) & = & Q(\tau, \overline{\lambda}_i(\tau)) \quad \forall i = [1, m]\ , \\ -g_j\big(\tau, \overline{\Lambda}(\tau)\big) & = & Q(\tau, \overline{\xi}_j(\tau)) \quad \forall j = [1, n] \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\xi}_j & = & Q(\tau, \overline{\lambda}_i) \quad \forall i = [1, m]\ , \\ -\sigma_j + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\overline{\lambda}_i & = & -Q(\tau, \overline{\xi}_j) \quad \forall j = [1, n]\ , \end{cases} \tag{2.7}$$

где функция $Q(\tau, s) = \mathrm{inv}\left(\dfrac{\partial P}{\partial s}\Big(\tau, s\Big)\right)$ есть обратная к функции $\dfrac{\partial P}{\partial s}\Big(\tau, s\Big)$.

Возможную истинность сделанного предположения подтверждает следующий

`Пример 1.` Для пары задач с параметром v :

прямая задача:
максимизировать в E^2 функцию $F(x) = 2\xi_1 + 3\xi_2$,
при условиях $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ и $\xi_1 + 2\xi_2 \leq v$, $2\xi_1 + \xi_2 \leq 6$;

двойственная задача:
минимизировать в E^2 функцию $G(\Lambda) = v\lambda_1 + 6\lambda_2$,
при условиях $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 2$, $2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 3$.

`Решение.`

Пусть значение $v = 6$,
тогда решения имеют вид $\xi_1^* = 2,\ \xi_2^* = 2,\ F^* = 10$ и $\lambda_1^* = \frac{4}{3},\ \lambda_2^* = \frac{1}{3},\ G^* = 10$.

Если использовать $P(\tau, s) = \tau \exp\left(\dfrac{s}{\tau}\right)$ и $Q(\tau, s) = \mathrm{inv}\left(\exp\left(\dfrac{s}{\tau}\right)\right) = \tau \ln s$, то система (2.7) будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
-6 + \overline{\xi}_1 + 2\overline{\xi}_2 &= \tau \ln \overline{\lambda}_1 \ , \\
-6 + 2\overline{\xi}_1 + \overline{\xi}_2 &= \tau \ln \overline{\lambda}_2 \ , \\
-2 + \overline{\lambda}_1 + 2\overline{\lambda}_2 &= -\tau \ln \overline{\xi}_1 \ , \\
-3 + 2\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 &= -\tau \ln \overline{\xi}_2 \ ,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

решения которой для различных значений параметра τ приведены в табл. 1.

Таблица 1. Решения системы (2.8) для примера 1 с параметром $v = 6$.

τ	$\overline{\xi}_1(\tau)$	$\overline{\xi}_2(\tau)$	$F(\overline{x}(\tau))$	$\overline{\lambda}_1(\tau)$	$\overline{\lambda}_2(\tau)$	$G(\overline{\Lambda}(\tau))$
10^{-1}	1.91387303	2.05644660	9.99708585	1.30690566	0.31409072	9.72597830
10^{-2}	1.99167722	2.00559101	10.0001275	1.33099033	0.33105995	9.97230168
10^{-3}	1.99917130	2.00055811	10.0000169	1.33310196	0.33310265	9.99722768
10^{-4}	1.99991717	2.00005580	10.0000017	1.33331023	0.33331023	9.99972274
10^{-5}	1.99999172	2.00000558	10.0000002	1.33333102	0.33333102	9.99997227
10^{-6}	1.99999917	2.00000056	10.0000000	1.33333310	0.33333102	9.99999723

Обоснование метода функций обратных связей для задач линейного программирования

Непрерывно дифференцируемая функция $\dfrac{\partial P}{\partial s}$, удовлетворяющая всем условиям (2.4), монотонно возрастает по $s \ \forall s$ и имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $Q(\tau, s)$, которая, в свою очередь, монотонно возрастает по $s \ \forall s > 0$. Кроме того, для нее имеем

$$\lim_{s\to+0} Q(\tau, s) = -\infty \ \ \forall\tau > 0\,, \quad \lim_{s\to+\infty} Q(\tau, s) = +\infty \ \ \forall\tau > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\tau\to+0} Q(\tau, s) = 0 \quad \forall s > 0\,.$$

Через $R(\tau, s)$ обозначим неотрицательную, имеющую единственный ноль функцию, для которой справедливо равенство

$$\frac{\partial R}{\partial s} = Q(\tau, s)\,. \tag{3.1}$$

Заметим, что в сделанных предположениях функция $R(\tau, s)$ существует и единственна.

Введем в рассмотрение вспомогательную (называемую далее для краткости U-функцией) функцию вида

$$U(\tau, x, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sigma_j \xi_j - R(\tau, \xi_j)\Big) + \sum_{i=1}^{m} \Big(\beta_i \lambda_i + R(\tau, \lambda_i)\Big) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \xi_j \lambda_i \,. \tag{3.2}$$

В этом случае решения системы (2.7) (если они существуют) – векторы $\overline{x}(\tau)$ и $\overline{\Lambda}(\tau)$ – суть стационарные точки U-функции по совокупности переменных $\{\, x;\, \Lambda \,\}$.

`Теорема 3.1.` **Функция** $U(\tau, x, \Lambda)$ **строго выпукла вверх по** x **и строго выпукла вниз по** Λ **в любой конечной точке с положительными координатами в пространстве** $E^n \otimes E^m \quad \forall \tau > 0$**.**

Совместность системы (2.7) обуславлевает

`Теорема 3.2.` **Система уравнений** (2.7) **имеет единственное решение с положительными компонентами при любом фиксированном** $\tau > 0$ **для любой пары задач** (2.1)**,** (2.2)**.**

Рассмотрим теперь свойства функции $R(\tau, s)$. Эта функция очевидно определена при любых положительных τ и s, в своей области определения неотрицательна и имеет единственный ноль, а также дважды непрерывно дифференцируема и строго выпукла вниз по s на $s > 0$. Кроме того, важное для дальнейшего свойство функции $R(\tau, s)$ описывает

Теорема 3.3. **Для любого фиксированного** $s \in (0, +\infty)$ **имеем** $\lim\limits_{\tau \to +0} R(\tau, s) = 0$.

Другое полезное свойство U-функции описывает

Теорема 3.4. **Если** $L(x, \Lambda)$ **– функция Лагранжа пары задач** (2.1) **и** (2.2)**, то** $\forall x$ **и** $\forall \Lambda$ **из области определения** $L(x, \Lambda)$

$$\lim_{\tau \to +0} U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) \,, \tag{3.15}$$

Дадим следующее

`Определение.` *Совокупность точек пространства* $E^n \otimes E^m$ *вида* $\{\,\overline{x}(\tau);\,\overline{\Lambda}(\tau)\,\}$ $\forall \tau > 0$ – *назовем седловой траекторией* U*-функции пары задач* (2.1) *и* (2.2).

Из теоремы 3.2 следует, что на каждой седловой траектории определены вектор-функции $\overline{x}(\tau),\,\overline{\Lambda}(\tau),$ а также скалярная функция $\overline{U}(\tau) = U\Big(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau)\Big)$.

Рассмотрим их свойства.

`Теорема 3.6.` **Для собственных задач** (2.1) **и** (2.2)**, вектор-функции** $\overline{x}(\tau)$ **и** $\overline{\Lambda}(\tau)$ **непрерывно дифференцируемы** $\forall \tau > 0$.

`Теорема 3.8.` **На седловых траекториях для собственных задач** (2.1) **и** (2.2) **имеем**

$$\lim_{\tau \to +0} U\Big(\tau, \overline{x}(\tau), \overline{\Lambda}(\tau)\Big) = F\,(x^*) = G\,(\Lambda^*)\,, \tag{3.21}$$

а в случае единственности решений (**регулярности**) **пары задач** (2.1) **и** (2.2) **справедливы также равенства**

$$\lim_{\tau \to +0} \overline{x}(\tau) = x^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \to +0} \overline{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*\,. \tag{3.22}$$

В завершение описания свойств U-функции для линейных задач заметим, что единственность седловой точки U-функции позволяет рассматривать ее представление в виде суммы функции Лагранжа и слагаемого

$$\sum_{i=1}^{m} R(\tau, \lambda_i) - \sum_{j=1}^{n} R(\tau, \xi_j)$$

как метод регуляризации собственных (но нерегулярных) задач, а саму U-функцию как вариант модифицированной функции Лагранжа. Существенно, что неотрицательность оценок множителей Лагранжа гарантирована условиями (2.4).

Проиллюстрируем утверждения приведенных выше теорем следующими вариантами примера 1. Конкретно рассмотрим:

`Пример 1` со значением параметра $v = 3$, решение которого: $\xi_1^* = 3,\ \xi_2^* = 0,\ F^* = 6$ и $\lambda_1^* = 2 - 2t,\ \lambda_2^* = t\ \ \forall t \in \left[0,\ \frac{1}{3}\right]$, $G^* = 6$. Решение прямой задачи единственное и *переопределенное* (т.е. в точке решения число активных ограничений больше числа переменных), а решение двойственной задачи *неединственное.*

и

`Пример 1` со значением параметра $v = -3$, в котором прямая задача *несовместна*, а двойственная имеет *неограниченное* решение.

Т а б л и ц а 2. Решения системы (3.26) для примера 1 с параметром $v = 3$.

τ	$\overline{\xi}_1(\tau)$	$\overline{\xi}_2(\tau)$	$F(\overline{x}(\tau))$	$\overline{\lambda}_1(\tau)$	$\overline{\lambda}_2(\tau)$	$G(\overline{\Lambda}(\tau))$	$g_1(\overline{\Lambda}(\tau))$
10^{-1}	2.754765504	0.146829492	5.950019486	1.595322348	0.142544871	5.641236270	-0.119587910
10^{-2}	2.980995393	0.011993961	5.997972668	1.615620231	0.185576042	5.960316945	-0.013227685
10^{-3}	2.998148668	1.1754 10^{-3}	5.999823636	1.617360455	0.190653620	5.996003086	-1.3323 10^{-3}
10^{-4}	2.999815350	1.1731 10^{-4}	5.999823636	1.617531210	0.191167734	5.999600031	-1.3332 10^{-4}
10^{-5}	2.999981540	1.1728 10^{-5}	5.999998265	1.617548252	0.191167734	5.999960000	-1.3333 10^{-5}
10^{-6}	2.999998154	1.1728 10^{-6}	5.999999827	1.617549956	0.191224355	5.999996000	-1.3333 10^{-6}

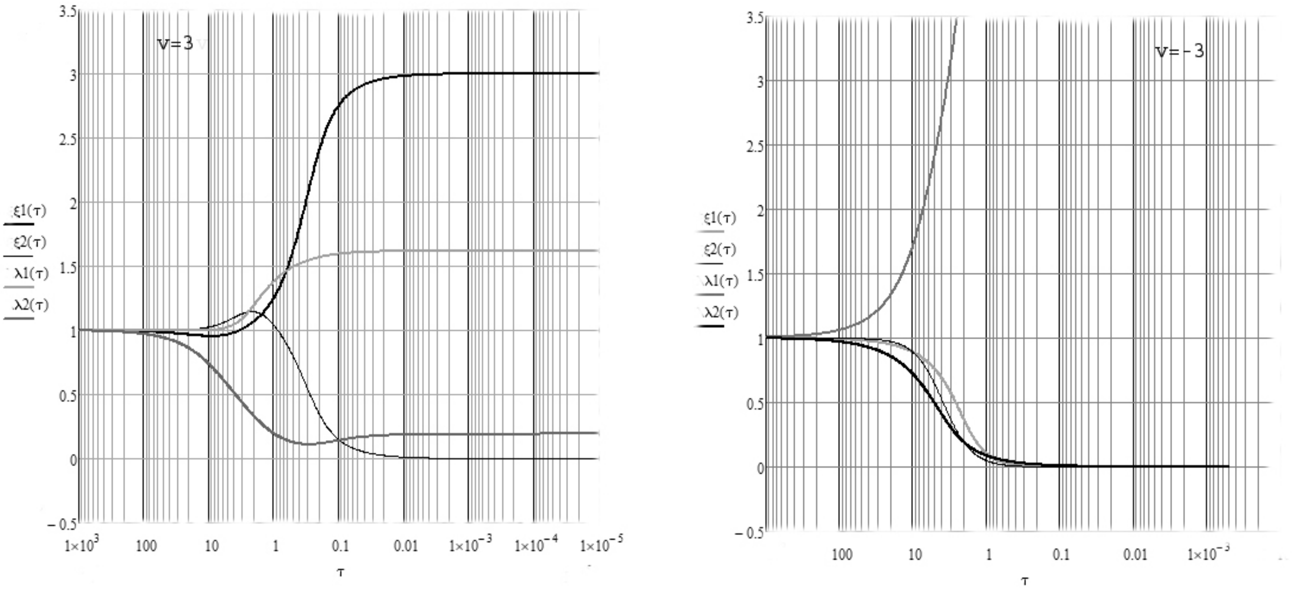

Рис. 1. Графики функций $\overline{\xi}_1(\tau)$, $\overline{\xi}_2(\tau)$, $\overline{\lambda}_1(\tau)$, $\overline{\lambda}_2(\tau)$ для решений системы (3.26) с $v = 3$ и $v = -3$.

Таблица 3. Решения системы (3.26) для примера 1 с параметром $v = -3$.

τ	$\overline{\xi}_1(\tau)$	$\overline{\xi}_2(\tau)$	$F(\overline{x}(\tau))$	$\overline{\lambda}_1(\tau)$	$\overline{\lambda}_2(\tau)$	$G(\overline{\Lambda}(\tau))$	$\overline{F}(x) - \overline{G}(\Lambda)$
10^3	0.999000478	0.999990964	4.997973847	1.006016976	0.997002498	2.963964059	2.034009788
10^2	0.990028539	0.999064507	4.977250598	1.061672873	0.970247397	2.636465765	2.340784833
10	0.890763029	0.891130932	4.454918853	1.717012067	0.721168975	-0.824022353	5.278941206
1	0.104551523	0.048898425	0.355798321	6.557200845	0.086427254	-19.153039010	19.508837331
10^{-1}	$8.6106\ 10^{-4}$	$4.2695\ 10^{-4}$	$3.0030\ 10^{-3}$	60.050951736	$8.3357\ 10^{-3}$	-180.102840769	180.105843742
10^{-2}	$8.3611\ 10^{-6}$	$4.1771\ 10^{-6}$	$4.9253\ 10^{-5}$	600.005009704	$8.3334\ 10^{-4}$	-1800.010029000	$1.8000\ 10^3$
10^{-3}	$8.3361\ 10^{-8}$	$4.1677\ 10^{-8}$	$2.9175\ 10^{-7}$	$6.0000\ 10^3$	$8.3333\ 10^{-5}$	-18000.001000000	$1.8000\ 10^4$

При решении задач (как альтернативу системе (2.8)) в качестве $P(\tau, s)$ выберем функцию, для которой $\dfrac{\partial P}{\partial s} = \dfrac{s}{\tau} + \sqrt{\left(\dfrac{s}{\tau}\right)^2 + 1}$ и соответственно $Q(\tau, s) = \dfrac{\tau}{2}\left(s - \dfrac{1}{s}\right)$.

Заметим, что при таком выборе $P(\tau, s)$ является бесконечно дифференцируемой аппроксимацией стандартной квадратичной штрафной функции, поскольку

$$\frac{s}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{s}{\tau}\right)^2 + 1} \;\sim\; \frac{s + |s|}{\tau}$$

для малых положительных τ . В этом случае система (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned}
-3 + \overline{\xi}_1 + 2\overline{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2}\left(\overline{\lambda}_1 - \frac{1}{\overline{\lambda}_1}\right) ,\\
-6 + 2\overline{\xi}_1 + \overline{\xi}_2 &= \frac{\tau}{2}\left(\overline{\lambda}_2 - \frac{1}{\overline{\lambda}_2}\right) ,\\
-2 + \overline{\lambda}_1 + 2\overline{\lambda}_2 &= -\frac{\tau}{2}\left(\overline{\xi}_1 - \frac{1}{\overline{\xi}_1}\right) ,\\
-3 + 2\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 &= -\frac{\tau}{2}\left(\overline{\xi}_2 - \frac{1}{\overline{\xi}_2}\right) .
\end{aligned} \tag{3.26}$$