Модель анализа эффективности инвестиций на рынке ценных бумаг

В качестве примера использования методологии неполного моделирования рассмотрим процедуру получения маргинальных оценок количественных характеристик инвестиционной деятельности на рынке ценных бумаг.

Хотя единицы измерения этих характеристик выбраны условно, рассматриваемый пример в достаточно полной мере демонстрирует как концептуальную специфику неполных математических моделей, так и возможные пути преодоления практических трудностей их использования.

Содержательная постановка задачи

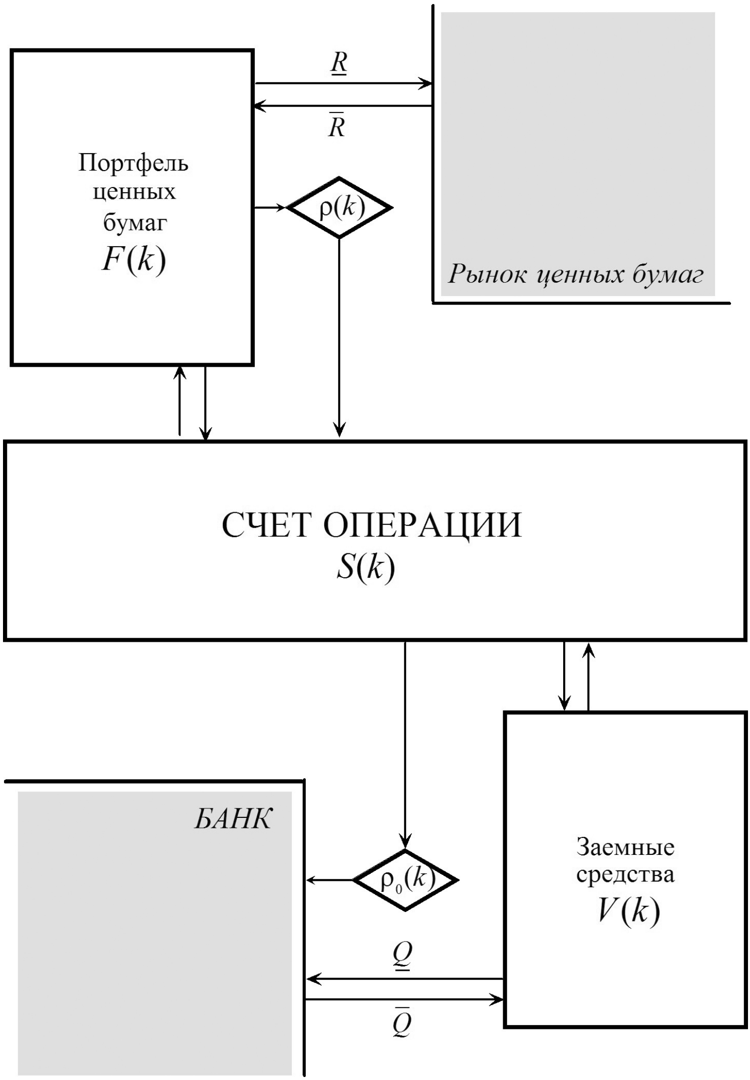
Будем рассматривать следующую операцию на рынке ценных бумаг. В течении N периодов (например, банковских дней) приобретается и продается определенный вид ценных бумаг с известной доходностью, оплата приобретения которых осуществляется заемными средствами, привлекаемыми по кредитной линии с фиксированной процентной ставкой.

Доходность ценных бумаг и стоимость кредита для каждого из периодов постоянны и известны. Максимальные объемы привлекаемых-возвращаемых средств по кредитной линии за один период, а также объемы приобретаемых-продаваемых ценных бумаг в течение одного периода ограничены.

Также предполагается, что объем портфеля ценных бумаг и суммарная задолженность по кредиту как в начале операции, так при ее окончании равны нулю.

Требуется оценить возможную эффективность данной операции по максимальной величине остатка средств на счете операции при ее завершении при фиксированном заранее числе периодов.

Необходимо также рассчитать динамику привлечения-возврата заемных средств, равно как и приобретения-продаж ценных бумаг, обеспечивающую эту эффективность. Схема операции приведена на рис.8.2.1.1.



$\underline{R}$
$\overline{R}$
Портфель ценных бумаг $F(k)$
$\rho(k)$
Рынок ценных бумаг
СЧЕТ ОПЕРАЦИИ $S(k)$
БАНК
$\rho_0(k)$
Заемные средства $V(k)$
$\underline{Q}$
$\overline{Q}$

Рис. 8.2.1.1.

Список показателей модели и их атрибутов

Используем для формализованного описания исследуемой операции (являющимся частным случаем задачи *дискретного оптимального управления*, см. § 5.1.1) следующие количественные характеристики для каждого периода $k = [1, N]$:

- $S(k)$ – остаток средств на счете операции в период k;
- $Q(k)$ – объем средств, привлеченных (или возвращенных) за период k;
- $R(k)$ – стоимость ценных бумаг, купленных (или проданных) за период k;
- $F(k)$ – объем портфеля ценных бумаг в период k;
- $V(k)$ – величина задолженности по кредиту в период k;
- $\rho_0(k)$ – процентная ставка по кредиту в период k;
- $\rho(k)$ – доходность ценных бумаг в период k.

Эти характеристики будут связаны следующими динамическими соотношениями для каждого $k = [1, N-1]$:

1°. Динамика счета операции:

$$S(k+1) =$$
$$= S(k) + Q(k) - R(k) + \rho(k) \cdot F(k) - \rho_0(k) \cdot V(k).$$

2°. Динамика объема портфеля ценных бумаг

$$F(k+1) = F(k) + R(k) . \qquad (8.2.2.1)$$

3°. Динамика задолженности по кредиту

$$V(k+1) = V(k) + Q(k) .$$

В системе разностных уравнений (8.2.2.1) переменные $S(k)$, $V(k)$, $F(k)$ являются *фазовыми переменными*, а переменные – $Q(k)$ и $R(k)$ *управлениями.*

На фазовые переменные и управления при этом накладываются следующие ограничения:

- $S(k) \geq 0; \ \forall k \in [1, N]$, то есть в ходе операции овердрафт по счету операции не допускается;
- $V(k) \geq 0; \ \forall k \in [1, N]$ и $F(k) \geq 0; \ \forall k \in [1, N]$ − очевидны;
- управления $Q(k)$ и $R(k)$ произвольны по знаку и должны удовлетворять двусторонним неравенствам, отражающими как технические, так и экономические ограничения (например, по ликвидности ценных бумаг)

$$\underline{Q}(k) \leq Q(k) \leq \overline{Q}(k); \quad \underline{R}(k) \leq R(k) \leq \overline{R}(k);$$
$$\forall k \in [1, N];$$

- начальные условия $S(1) = V(1) = F(1) = 0$, равно как и конечные условия $V(N) = F(N) = 0$ вытекают из условий проведения операции.

Наконец, целевое условие операции имеет вид $S(N) \to \max$.

Данная совокупность обязательных и желательных условий формально является задачей линейного программирования, в которой показатели

$$S(k), F(k), V(k), R(k), Q(k), \quad \forall k = [1, N]$$

являются переменными, а число периодов N и величины

$$\rho(k),\ \rho_0(k),\ \underline{R}(k),\ \overline{R}(k),\ \underline{Q}(k),\ \overline{Q}(k), \qquad \forall k = [1, N]$$

– параметрами, где величины $S(k), F(k), V(k)$ имеют размерность "у.е.", величины $R(k), Q(k), \underline{R}(k), \overline{R}(k), \underline{Q}(k)$ и $\overline{Q}(k)$ измеряются в "у.е./период", а $\rho(k)$ и $\rho_0(k)$ безразмерные.

Поскольку в этой модели не отражен ряд существенных, но не формализуемых факторов (например, таких как: внешние экономические и политические условия, а также всевозможные риски, обусловленные нестабильностью рынка ценных бумаг или стоимости кредита), то ее следует отнести к классу неполных моделей, позволяющей получить лишь маргинальную (верхнюю) оценку максимальной эффективности рассматриваемой операции.

Формулировка условий базового варианта задачи на языке L

Расчет базового варианта задачи был выполнен для следующего набора значений параметров: $N = 300$ и $\forall k = [1, N]$

$$\underline{Q}(k) = -20.0\,,\quad \overline{Q}(k) = 40.0\,,$$
$$\underline{R}(k) = -50.0\,,\quad \overline{R}(k) = 40.0\,,$$
$$\rho(k) = 0.008\,,\quad \rho_0(k) = 0.004\,.$$

Поскольку для каждого из периодов для рассматриваемой модели необходимо, следуя правилам, описанным в §7.1, использовать 12 показателей, то общее число показателей модели для базового варианта составит 3600, что приводит к *необходимости автоматизаци*и процедур ввода данных в ЭВМ и анализа полученных решений.

В рамках настоящего курса для решения этих проблем оказалось достаточным использовать:

1) интерпретатор языка `L`, позволяющий автоматизировать формирование условий и поиск решения для линейных задач оптимального управления;
2) программу `MS Excel` для обработки результатов расчетов.

Язык `L` является модифицированным подмножеством языка `C++.` Ниже приводится закомментированный текст входного файла для интерпретатора языка `L`, позволяющий ввести исходные данные, решить задачу линейного программирования и сформировать файл выходных данных для базового варианта задачи.

```
//
//
//                     Модель Invest04.l
//
// L-файл для модели оценки эффективности инвестиционных
// операций на рынке ценных бумаг
// В этом варианте модели доходность ценных бумаг и стоимость
// кредита постоянны
//
//
// Блок параметров
//
// Задается число периодов
const int N = 300;
//
// Задается имя варианта задачи
string name = "Invest04";
//
// Задаются границы для управлений Q(k) и R(k)
const double Qmin = -20.00;
const double Qmax =  40.00;
const double Rmin = -50.00;
const double Rmax =  40.00;
```

```
// Задается стоимость кредита
const double r0 = 0.004;
// Задается доходность ценных бумаг
const double rk = 0.008;
//
// Создаются массивы значений p(k) и p0(k)
double po[N+1];
double pk[N+1];
int j;
     for( j=0; j<=N; j++ )
          { po[j]=r0; pk[j]=rk; };

// Формируем имя для служебного файла
string datName = name ".dat";
//
// Формируем имя для выходного файла
string txtName = name ".txt";
```

```
// Определяется структура данных для периода модели
struct Period
// Задаем список показателей для периода
{     real F;
      real V;
      real S;
      real Q;
      real R;
      real dF;
      real dV;
      real dS;
// Последние три показателя нужны для
// формирования связей между фазовыми
// переменными в разных периодах
};
//
```

```
// Создается массив описаний периодов
Period p[N+1];
//
// Далее выполняется инициализация показателей модели для всех
// периодов
  int i;
  for( i=0; i<= N; i++ )
     {
      SetName( "F (" _itoa(i) ")", p[i].F
);
      SetName( "V (" _itoa(i) ")", p[i].V
);
      SetName( "S (" _itoa(i) ")", p[i].S
);
      SetName( "Q (" _itoa(i) ")", p[i].Q
);
      SetName( "R (" _itoa(i) ")", p[i].R
);
      SetName( "dF(" _itoa(i) ")", p[i].dF
);
      SetName( "dV(" _itoa(i) ")", p[i].dV
);
      SetName( "dS(" _itoa(i) ")", p[i].dS
);
     };
```

```
// Задаются начальные условия (для периода k=1)
     p[0].F.lOblBound = p[0].F.uOblBound =
0;
     p[0].V.lOblBound = p[0].V.uOblBound =
0;
     p[0].S.lOblBound = p[0].S.uOblBound =
0;
//
// Устанавливаются связи и ограничения для показателей
// для периода с номером k
// Задаются связи между фазовыми переменными
  int k;
  for( k=1; k<=N; k++ )
     {
p[k].dF :=
  p[k-1].F.link - p[k].F.link + p[k].R.link;
p[k].dV :=
  p[k-1].V.link - p[k].V.link + p[k].Q.link;
```

```
p[k].dS :=
      p[k-1].S.link - p[k].S.link
    - po[k] * p[k].V.link
    + pk[k] * p[k].F.link
    + p[k].Q.link - p[k].R.link;
//
// Уравнения динамических связей
p[k].dF.lOblBound = p[k].dF.uOblBound = 0;
p[k].dV.lOblBound = p[k].dV.uOblBound = 0;
p[k].dS.lOblBound = p[k].dS.uOblBound = 0;
//
```

```
// Устанавливаются ограничения на управления
      p[k].Q.lOblBound = Qmin;
      p[k].Q.uOblBound = Qmax;
      p[k].R.lOblBound = Rmin;
      p[k].R.uOblBound = Rmax;
      };
//
// Задаются конечные условия (для периода k=N)
      p[N].F.lOblBound = p[N].F.uOblBound =
0;
      p[N].V.lOblBound = p[N].V.uOblBound =
0;
//
// Задается целевое ограничение: (максимизация S(N))
      p[N].S.lDesBound = 15000;
//
```

```
// Устанавливаются значения допустимых погрешностей решения
    epsZero = epsBound = epsDeriv = 1e-9;
    epsIncon = 1e-9;
//
// Начало процесса решения (запуск решателя)
    print("\nSolving...\n");
    solve();


// Формирование выходных файлов
    print("\nSaving\n");
    SetProblemName(name);
    SaveProblem(datName);
//
```

```
// Перенаправление печати данных в выходной файл
     redirect(txtName);
//
// Определяется символ табуляции при печати
string s = "\t";

// Печать строки с именами показателей
print( "po" s "pk" s "F" s "V" s "S" s "R" s
"Q"
       s "dF" s "dV" s "dS\n" );
//
// Печать найденных значений показателей для всех периодов
     for( i=0; i<=N; i++ )
          {
          print(
               _ftoa(po[i]) s
               _ftoa(pk[i]) s
               _ftoa(p[i].F.value)  s
               _ftoa(p[i].V.value)  s
               _ftoa(p[i].S.value)  s
               _ftoa(p[i].R.value)  s
               _ftoa(p[i].Q.value)  s
               _ftoa(p[i].dF.value) s
               _ftoa(p[i].dV.value) s
               _ftoa(p[i].dS.value) "\n"
               );
          };
```

```
// Создание выходного параметра с оптимальным
// значением целевого функционала
double result;
      result=p[N].S.value;
//
// Закрытие выходного файла
      redirect("-");
      print("\nExiting\n");
```

Анализ решения тестового варианта

На рис. 8.2.4.1 и 8.2.4.2 приведены графики показателей – фазовых переменных $S(k), F(k), V(k), \forall k = [1, N]$ и показателей – управлений $R(k), Q(k), \forall k = [1, N]$, отражающие динамику их значений, обеспечивающую максимизацию остатка средств на счете операции при ее завершении для базового варианта расчета.

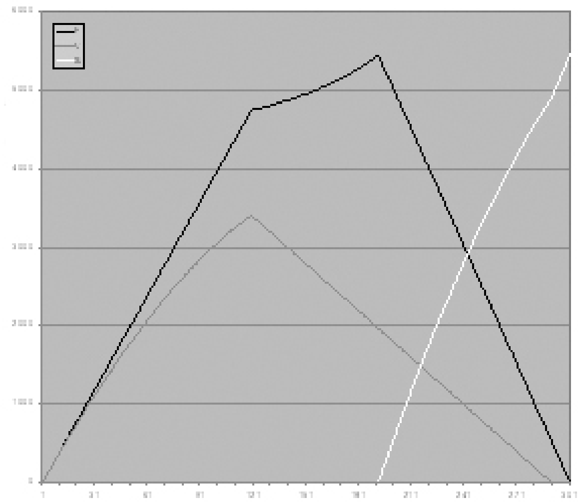


Рис. 8.2.4.1

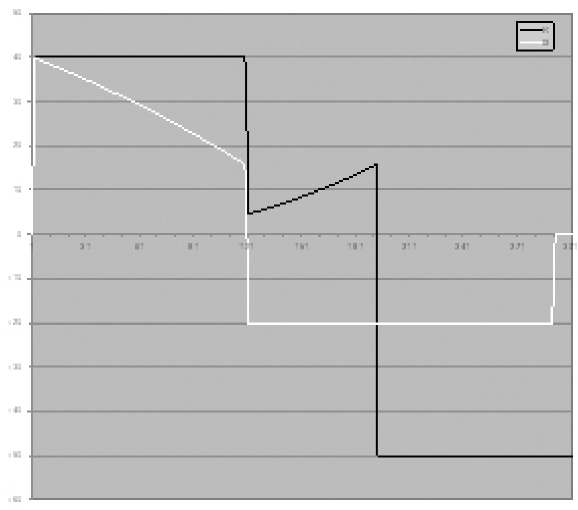


Рис. 8.2.4.2

Для определенности будем считать, что начальные условия для фазовых переменных фиксируются для $k = 0$, а конечные – для $k = 300$.

Важно отметить, что полученная оценка максимальной эффективности операции $S(N) = 5456.45$ является "верхней оптимистичной", поскольку добавление в неполную модель пополняющих ограничений сужает множество условно допустимых состояний (точнее, не расширяет его), что может привести к уменьшению значения оценки эффективности. Изменение же значений параметров или структуры связей должно рассматриваться как модификация неполной модели, требующей пересчета полученных результатов.

Как видно из графиков на рис. 8.2.4.1 зависимости $V(k)$ и $Q(k)$ нелинейны для первой группы периодов. Аналогичное заключение можно сделать о зависимостях $F(k)$ и $R(k)$ для второй группы периодов, а также о $S(k)$ для третьей и четвертой групп.

Определим характер этих нелинейностей, использовав аппроксимации данных зависимостей кусочно-непрерывными функциями $V(t), Q(t), F(t), R(t)$ и $S(t)$, для значений $t \in [0,T]$.

Выберем масштаб времени так, чтобы конец k–го периода совпадал с моментом $t = k$. Тогда $T = N$ и можно принять, что

$$F(k+1) - F(k) = F'(t)\ ; \quad V(k+1) - V(k) = V'(t) \quad \text{и}$$

$$S(k+1) - S(k) = S'(t)\ ,$$

а система разностных уравнений (8.2.2.1) может быть аппроксимирована системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} F' = R\ , \\ V' = Q\ , \\ S' = \rho F - \rho_0 V - R + Q\ , \end{cases} \tag{8.2.4.1}$$

при условиях:

$$F(0) = V(0) = S(0) = 0\ ; \qquad F(T) = V(T) = 0\ ;$$

$$F(t) \ge 0\ ; \quad V(t) \ge 0\ ; \quad S(t) \ge 0\ ; \quad \forall t \in [0,T]\ ;$$

$$\underline{R} \le R(t) \le \bar{R}\ ; \quad \underline{Q} \le Q(t) \le \bar{Q}\ .$$

Наконец, целевой функционал будет иметь вид: $S(T) \to \max\limits_{R,Q}$.

Рассмотрим *первую группу* периодов. Здесь мы имеем

$$S(t) = 0\,; \quad R(t) = \bar{R} \quad \text{и} \quad F(t) = \bar{R}\,t\,.$$

Поэтому система (8.2.4.1) упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} V' = Q\,, \\ 0 = \rho\,\bar{R}\,t - \rho_0 V - \bar{R} + Q\,, \end{cases}$$

что приводит к задаче Коши для $V(t)$

$$\begin{cases} V' = \rho_0 V - \rho\,\bar{R}\,t + \bar{R}\,, \\ V(0) = 0\,, \end{cases}$$

решением которой является функция

$$V(t) = \kappa e^{\rho_0 t} + \alpha\,t + \beta\,,$$

где α, β и κ − однозначно определяемые константы.

Рассмотрим теперь *вторую группу* периодов, предполагая, что первая группа завершилась в момент времени t_1 со значениями $V(t_1) = V_1$ и $F(t_1) = F_1$. Для второй группы имеем

$$S(t) = 0\,; \quad Q(t) = \underline{Q} \quad \text{и} \quad V(t) = V_1 + \underline{Q}(t - t_1)\,,$$

поэтому

$$\begin{cases} F' = R\,, \\ 0 = \rho F - \rho_0 (V_1 + \underline{Q}(t - t_1)) - R + \underline{Q}\,, \end{cases}$$

что приводит к задаче Коши для $F(t)$

$$\begin{cases} F' = \rho F - \rho_0 (V_1 + \underline{Q}(t - t_1)) + \underline{Q}\,, \\ F(t_1) = F_1\,, \end{cases}$$

с решением вида $F(t) = \mu e^{\rho t} + \gamma t + \delta$, где γ, δ и μ − однозначно определяемые константы.

В заключение рассмотрим *третью и четвертую группу* периодов, предположив, что вторая группа завершается в момент времени t_2 со значениями $V(t_2) = V_2$ и $F(t_2) = F_2$. Для третьей группы имееми

$$Q(t) = \underline{Q} \quad \text{и} \quad V(t) = V_2 + \underline{Q}(t - t_2)\,,$$

$$R(t) = \underline{R} \quad \text{и} \quad F(t) = F_2 + \underline{R}(t - t_2)\,,$$

поэтому

$$\begin{cases} F' = \underline{R}\,, \\ V' = \underline{Q}\,, \\ S' = \rho(F_2 + \underline{R}(t - t_2)) - \rho_0(V_2 + \underline{Q}(t - t_2)) - \underline{R} + \underline{Q}\,. \end{cases}$$

Окончательно мы получаем задачу Коши вида

$$\begin{cases} S' = \rho(F_2 + \underline{R}(t - t_2)) - \rho_0(V_2 + \underline{Q}(t - t_2)) - \underline{R} + \underline{Q}\,, \\ S(t_2) = 0\,, \end{cases}$$

решением которой является функция $S(t) = \theta t^2 + \vartheta t + \sigma$, где θ, ϑ и σ − однозначно определяемые константы.

Параметрический анализ модели инвестиций на рынке ценных бумаг

В качестве примера опишем процедуру анализа зависимости маргинальной оценки величины остатка средств на счете операции при ее завершении от значений параметров k_0 и k_1 – начальных периодов для скачков стоимости кредита и доходности на рынке ценных бумаг.

Для модели, описанной в §8.2.1, требовалось исследовать зависимость $S(N)$ от k_0 и k_1. При условии, что $\rho_0(k)$ и $\rho(k)$ являются кусочно-постоянными функциями вида:

$$\rho_0(k) = \begin{cases} a_0\ , & k < k_0, \\ b_0\ , & k_0 \le k \le k_0 + \Delta, \\ a_0\ , & k > k_0 + \Delta, \end{cases}$$

$$\rho(k) = \begin{cases} a\ , & k < k_1, \\ b\ , & k_1 \le k \le k_1 + \Delta, \\ a\ , & k > k_1 + \Delta. \end{cases}$$

На рис.8.3.1.4 и 8.3.1.5 показаны графические представления искомых зависимостей, полученные при помощи программы `MultiLc`, для следующих диапазонов значений варьируемых параметров:

$$a_0 = 0.004\,,\, b_0 = 0.006\,, \quad a = 0.008\,,\, b = 0.01$$

$$\text{и} \quad a_0 = 0.004\,,\, b_0 = 0.002\,, \quad a = 0.008\,,\, b = 0.01\ ,$$

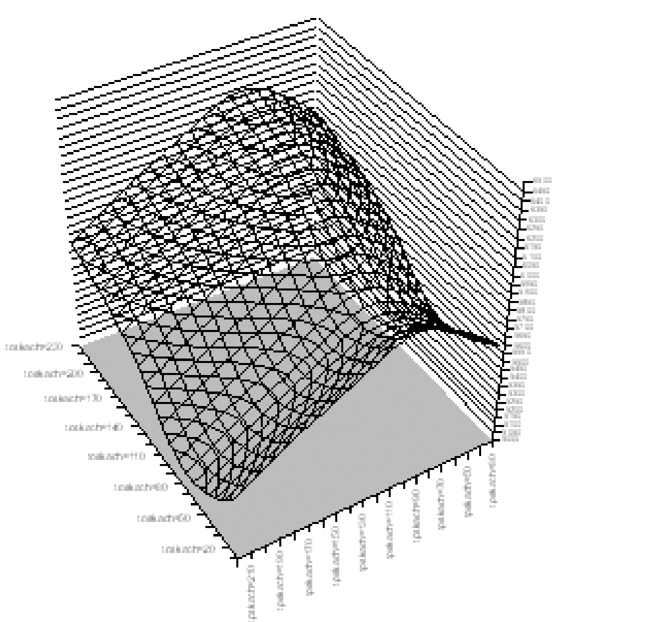


Рис. 8.3.1.4.

причем в обоих случаях выбирались $N = 300$, $\Delta = 50$, а

$$20 \le k_0 \le 230, \quad 30 \le k_1 \le 220$$

с постоянным шагом изменения, равным 10.

В качестве иллюстрации приведем краткий качественный анализ полученных результатов.

Этот анализ показывает, что в случае нестабильного поведения рынка ценных бумаг, проявляющегося в скачке дохода вида (8.2.5.1) в момент времени k_1 существует, и притом единственная, реакция рынка кредитных линий, заключающаяся в скачке стоимости кредита в момент времени k_0, при которой достигается максимальная эффективность операции.

Иначе говоря, оптимальное значение k_0 оказывается некоторой поддающейся оценке функцией от k_1, и это обстоятельство может быть использовано регулирующими органами для улучшения условий функционирования финансовых рынков в целом или, например, в целях оптимизации налогообложения.

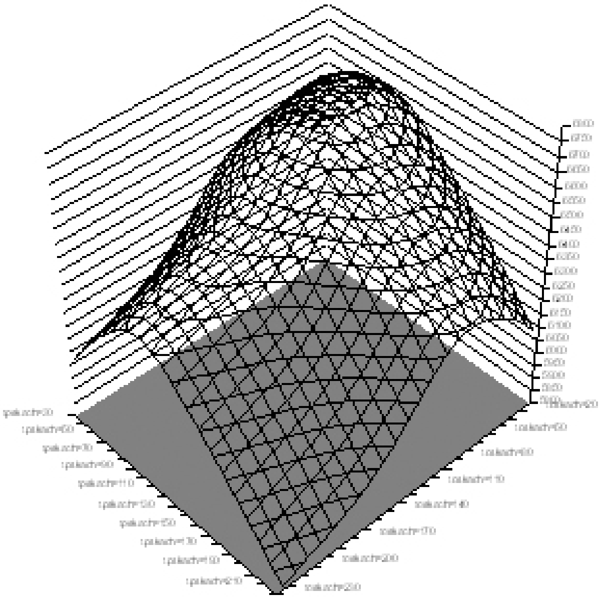


Рис. 8.3.1.5.

В заключение укажем на возможное естественное обобщение модели, состоящее во включении в число неизвестных показателей $\rho_0(k)$ и $\rho(k)$. Формально это приводит к следующей оптимизационной задаче:

максимизировать $S(N)$

при условиях:

$$S(k+1) = S(k) + Q(k) - R(k) + \rho(k) \cdot F(k) - \rho_0(k) \cdot V(k),$$
$$F(k+1) = F(k) + R(k),$$
$$V(k+1) = V(k) + Q(k), \quad \forall k = [1, N-1], \tag{8.3.1.1}$$

и $\forall k \in [1, N]$,

$$S(k) \geq 0, \quad V(k) \geq 0, \quad F(k) \geq 0,$$
$$\underline{Q}(k) \leq Q(k) \leq \overline{Q}(k), \;\; \underline{R}(k) \leq R(k) \leq \overline{R}(k),$$
$$S(1) = V(1) = F(1) = 0, \qquad V(N) = F(N) = 0,$$

являющейся задачей нелинейного программирования

Размерность этой задачи слишком высока, чтобы можно было непосредственно применить для ее решения какой-либо из стандартных методов.

Однако, если принять во внимание *специфику структуры* задачи (8.3.1.1), заключающуюся в том, что эта задача *линейна* при фиксированных $\rho_0(k)$ и $\rho(k)$, оказывается возможным, например, использование следующей *двухуровневой* схемы решения.

На *верхнем* уровне решается задача:

максимизировать $S(N)$ *по совокупности допустимых значений* $\rho_0(k)$ *и* $\rho(k)$.

При этом для каждой итерации при пересчете $\rho_0(k)$ и $\rho(k)$ может потребоваться (и, возможно, неоднократное) решение задачи *нижнего* уровня (8.3.1.1).