

Московский физико-технический институт  
(Национальный исследовательский университет)

УМНОВ А.Е., УМНОВ Е.А.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ  
КУРСА  
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

МФТИ, 11апр2026г

## Некоторые полезные сведения из курса элементарной математики

Обычно предполагается, что студенты изначально владеют основами элементарной математики в объеме учебных программ средней школы. Тем не менее, представляется целесообразным привести (в справочной форме) перечень некоторых базовых сведений, используемых при изучении высшей математики.

### 1°. Числа и их виды

Как известно, основным объектом изучения в математике являются *числа*, для совокупности которых, называемой *числовым множеством*, возможно выполнение операций сравнения, сложения, умножения и т.д.

Числа разделяются на

- *натуральные*, возникающие при счете каких-либо объектов,
- *целые*, множество которых состоит из натуральных «со знаком» и числа «ноль»,
- *рациональные*, представимые в виде несокращаемого отношения двух целых чисел, и
- *иррациональные*, формой представления которых является бесконечная непериодическая десятичная дробь.

В качестве общего названия рациональных и иррациональных чисел используется термин *вещественные числа*.

## 2°. Формулы сокращенного умножения

Для любых чисел  $a$  и  $b$  справедливы равенства

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b), \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2), \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

Напомним также, что для любых *неотрицательных* чисел  $a$  и  $b$  имеет место соотношение  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , причем по определению арифметического квадратного корня принимается, что

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Отметим, что  $|a|$  – *абсолютную величину* числа  $a$ , принято также называть *модулем*  $a$ .

## 3°. Линейные уравнения

Уравнение вида

$$ax + b = 0,$$

где  $x$  – неизвестное, а  $a \neq 0$  и  $b$  – фиксированные числа, называется *линейным*. Оно имеет единственное решение  $x = -\frac{b}{a}$ .

## 4°. Квадратные уравнения

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где  $x$  – неизвестное, а  $a \neq 0$ ,  $b$  и  $c$  – фиксированные числа, называется *квадратным*.

При  $D > 0$  оно имеет *два* решения

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

где число  $D = b^2 - 4ac$  называется *дискриминантом*.

При  $D = 0$  квадратное уравнение имеет *одно* решение

$$x = -\frac{b}{2a},$$

а при  $D < 0$  оно *не имеет* решений.

Если квадратное уравнение имеет корни, то будут выполняться следующие равенства (*теорема Виета*)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

### 5°. Степени и их свойства

*Степенью* числа  $a$  *порядка*  $k$  ( $k$  – натуральное число, не меньшее, чем 2), обозначаемой  $a^k$ , называется произведение вида  $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_k$ . В этом случае число  $a$  называют *основанием*, а число

$k$  *множителей*  
 $k$  – *показателем* степени.

Степени с натуральным показателем  $k \geq 2$  обладают очевидными свойствами:

- 1)  $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ ;
- 2)  $(a^n)^m = a^{nm}$ .

Понятие степени положительного и не равного единицы числа  $a$  можно обобщить на случай, когда ее показатель есть рациональное число вида  $p = \frac{m}{n}$ , то есть числа  $m$  и  $n \neq 0$  любые целые. Для этого (*по определению*) принимают, что для любого  $a > 0$  и  $a \neq 1$  выполняются равенства

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}; \quad a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}.$$

Тогда для степеней с рациональным показателем также будут справедливы свойства 1) и 2):

- 1)  $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$ ;
- 2)  $(a^p)^q = a^{pq}$ .

В курсе математического анализа показывается, что соотношения 1) и 2) справедливы и для любых вещественных чисел  $p$  и  $q$ , при любом положительном, не равном единице вещественном числе  $a$ .

Функция  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  называется *показательной*. На рис.1 приведен ее графика при  $a = 3$ .

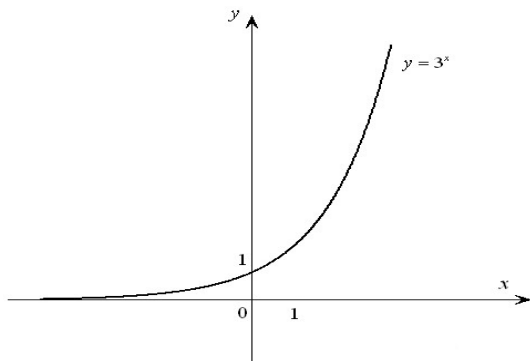


Рис. 1. График показательной функции

## 6°. Логарифмы и их свойства

Логарифмом положительного числа  $a$  по основанию  $b$  ( $b$  – положительное число и  $b \neq 1$ ), обозначаемым  $\log_b a$ , называется *показатель степени*, в которую следует возвести число  $b$ , чтобы получить  $a$ . Число  $b$  принято называть *основанием* логарифма.

Отметим, что данное определение можно также представить в виде формулы

$$b^{\log_b a} = a, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1,$$

которую называют *основным логарифмическим тождеством*.

Для часто используемых на практике *десятичных* логарифмов (то есть логарифмов по основанию 10) для упрощения записи применяется специальное обозначение  $\log_{10} a \equiv \lg a$ . По той же причине в высшей математике логарифмы по основанию  $e$  (иррациональное число  $e \approx 2.72\dots$ ), называемые *натуральными*, обозначают  $\log_e a \equiv \ln a$ .

Логарифмы для любых положительных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $c \neq 1$  обладают следующими, вытекающими из их определения, свойствами:

- 1)  $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ ;
- 2)  $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$ ;
- 3)  $\log_c a^b = b \log_c a$ ;
- 4)  $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}, \quad b \neq 1$ .

Формулу 4) можно использовать для перехода от одного основания логарифма к другому. Например,  $\log_2 17 = \frac{\lg 17}{\lg 2}$ .

Функция  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  называется *логарифмической*. На рис.2 показан вид ее графика при  $a = 3$ .

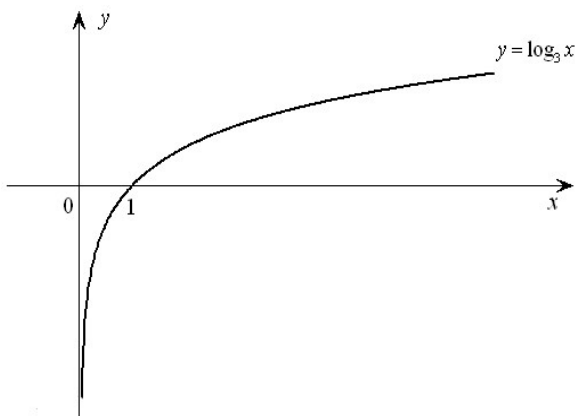


Рис. 2. График логарифмической функции

## 7°. Тригонометрические функции, тождества и уравнения

Напомним, что углы можно измерять как в *градусной*, так и в *радианной* мере.

За один *градус* принимают величину центрального угла, опирающегося на дугу в окружности, длина которой равна  $\frac{1}{360}$  длины окружности. За один *радиан* принимают величину центрального угла в окружности, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу этой окружности. Поскольку длина окружности  $2\pi r$ , то угол в  $360^\circ$  имеет величину  $2\pi$  радиан.

Определение основных тригонометрических функций удобно давать при помощи так называемого *тригонометрического круга* показанного на рис.3.

*Синусом* угла  $\alpha$  называется отношение  $y$ -координаты точки  $A$  к длине вектора  $\vec{r} = \vec{OA}$ .

*Косинусом* угла  $\alpha$  называется отношение  $x$ -координаты точки  $A$  к длине вектора  $\vec{r} = \vec{OA}$ .

*Тангенсом* угла  $\alpha$  называется отношение  $y$ -координаты точки  $A$  к ее  $x$ -координате.

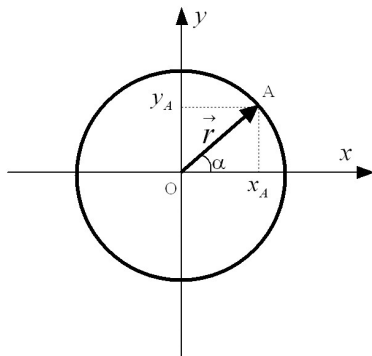


Рис. 3. Определение основных тригонометрических функций

Заметим, что в силу этих определений

- 1) синус и косинус имеют значения (не превосходящие по модулю 1) для *любых* углов  $\alpha$ . В то время как тангенс может принимать любые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , но при этом он не существует для углов равных  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n$  любое целое число, то есть для углов  $\pm 90^\circ$ ,  $\pm 270^\circ$ ,  $\pm 450^\circ$ , ...
- 2) тригонометрические функции обладают свойством *периодичности*, то есть их значения повторяются при изменении аргумента  $\alpha$  на одно и то же минимально возможное, положительное число, называемое *периодом*.  
Период синуса и косинуса равен  $2\pi$ , а тангенса —  $\pi$ .

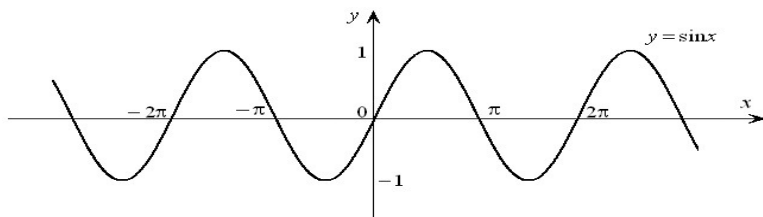
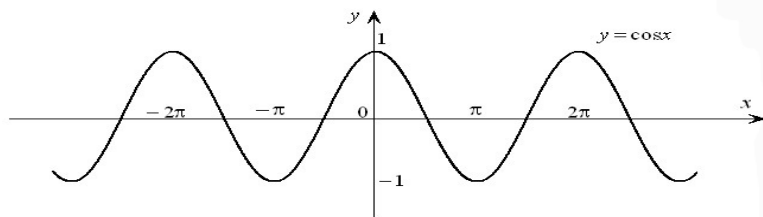
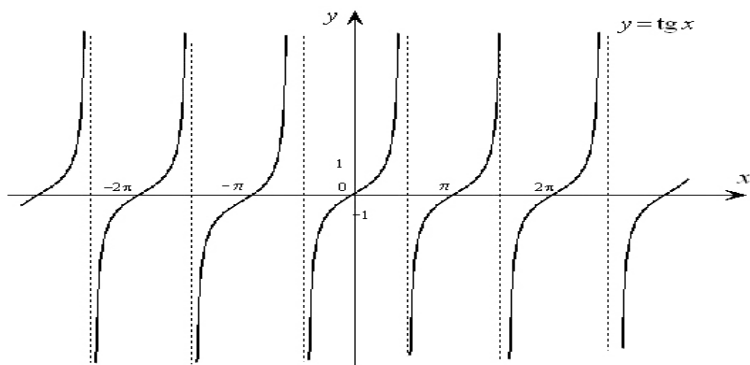
Тригонометрические функции вещественного аргумента  $x$  (обычно измеряемого в радианной мере) принято обозначать как  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  и  $y = \operatorname{tg} x$ . Их графики приведены на рисунках 4 – 6.

Иногда используются также функции *котангенс*, *секенс* и *косекенс*  
 $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ ,  $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$ ,  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ .

Для тригонометрических функций справедливы равенства, позволяющие выражать одни из них через другие. Приведем наиболее часто используемые на практике соотношения.

- 1) Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Рис. 4. График функции *синус*Рис. 5. График функции *косинус*Рис. 6. График функции *тангенс*

## 2) Формулы суммы (разности) аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta ,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta ,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} ,$$

## 3) Формулы двойных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha , \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha ,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} .$$

## 4) Формулы преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение и обратно

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} ,$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ,$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} ,$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left( \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right) ,$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left( \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \right) ,$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left( \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right) .$$

## 5) Наконец, могут оказаться полезными и соотношения вида

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} , \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

В случае, когда  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  (например, если  $\alpha, \beta, \gamma$  суть углы некоторого треугольника) будут верны равенства

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

В вычислительной практике достаточно часто возникает задача определения величины угла по значению какой-либо из его тригонометрических функций.

Для решения этой задачи используются *обратные тригонометрические функции*: *арксинус*  $y = \arcsin x$ , *арккосинус*  $y = \arccos x$  и *арктангенс*  $y = \operatorname{arctg} x$ .

Напомним определения этих функций.

*Арксинусом*  $x$  при условии, что  $|x| \leq 1$ , называется число  $y$

такое, что  $|y| \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\sin y = x$ .

*Арккосинусом*  $x$  при условии, что  $|x| \leq 1$ , называется число  $y$  такое, что  $0 \leq y \leq \pi$  и  $\cos y = x$ .

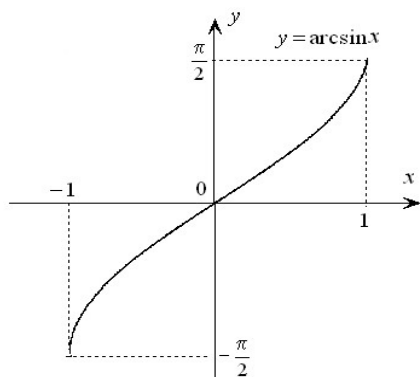
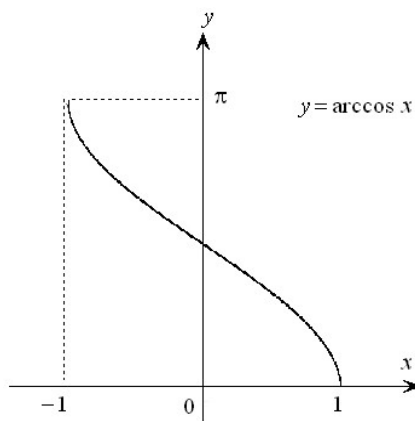
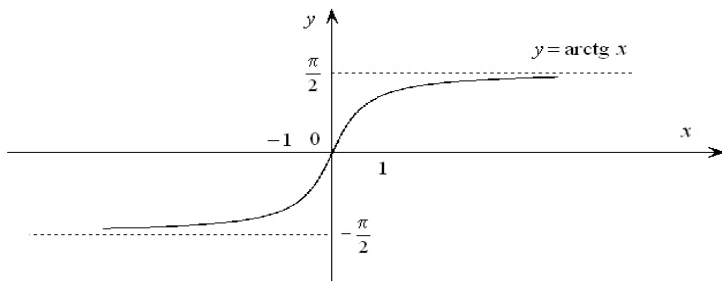
*Арктангенсом*  $x$  (для любого  $x$ ) называется число  $y$  такое,

что  $|y| \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\operatorname{tg} y = x$ .

При решении прикладных задач часто оказывается полезной (легко проверяемой по приведенным выше определениям) формула

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что аргументы обратных тригонометрических функций не имеют размерности, в то время как их значения являются углами и изменяются как правило в радианной мере. Графики обратных тригонометрических функций приведены на рисунках 7 – 9.

Рис. 7. График функции *арксинус*Рис. 8. График функции *арккосинус*Рис. 9. График функции *арктангенс*

Обратные тригонометрические функции можно использовать при решении тригонометрических уравнений. Так, например, уравнение

$$\sin x = a \quad \text{при } |a| \leq 1 \text{ имеет корни вида } x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

$$\text{уравнение } \cos x = a \quad \text{при } |a| \leq 1 \text{ имеет корни } x = \pm \arccos a + 2\pi n,$$

$$\text{уравнение } \operatorname{tg} x = a \quad \text{при любом } a \text{ имеет корни } x = \operatorname{arctg} a + \pi n,$$

причем во всех этих формулах  $n$  – любое целое число, то есть,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

## 8°. Множества. Элементы комбинаторики

Под *множеством* в математике понимают совокупность объектов (или элементов), которые можно отличать как друг от друга, так и от объектов, не входящих в данную совокупность.

Тот факт, что объект  $x$  принадлежит множеству  $X$  принято обозначать как  $x \in X$ . Если объект  $x$  не принадлежит множеству  $X$ , то используется обозначение  $x \notin X$ . Для обозначения *пустого* множества, то есть не имеющего в своем составе ни одного объекта, используется символ  $\emptyset$ . Наконец, два множества  $X$  и  $Y$ , состоящие из одних и тех же объектов, называются *равными*, с обозначением факта равенства как  $X = Y$ .

Для множеств существуют операции *объединения*, обозначаемая символом  $\cup$ , и *пересечения* –  $\cap$ . Запись  $x \in X \cup Y$  означает, что объект  $x$  принадлежит либо множеству  $X$ , либо множеству  $Y$ , либо им обоим одновременно. В свою очередь, запись  $x \in X \cap Y$  означает, что объект  $x$  принадлежит одновременно как множеству  $X$ , так и множеству  $Y$ .

Если объектами, образующими множество  $X$  являются числа, то такое множество принято называть *числовым*. Множество состоящее из чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$ , называется *отрезком* и обозначается  $[a, b]$ . Если же числовое множество состоит из чисел, для которых  $a < x < b$ , то оно называется *интервалом* и обозначается  $(a, b)$ . Наконец, термин *промежуток* обозначает либо либо отрезок, либо интервал, либо *полуинтервал* вида  $(a, b]$  или  $[a, b)$ . Промежуток, содержащий точку  $x$ , принято называть *окрестностью* этой точки.

Пусть имеется множество, состоящее из  $n$  элементов. Каждую *упорядоченную* выборку из этого множества, содержащую  $k$  элементов, называют *размещением* из  $n$  элементов по  $k$  элементов (иногда говорят: «размещение из  $n$  по  $k$ »). В рассматриваемом случае очевидно, что  $0 \leq k \leq n$ .

Число всех размещений из  $n$  по  $k$  обозначается  $A_n^k$ . Если учесть, что при  $k = 0$  существует только одно размещение – пустое множество  $\emptyset$ , то справедливо равенство

$$A_n^k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1), & \text{если } k > 0. \end{cases}$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  называется  $n$ -*факториалом*, его принято обозначать

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

(читается «эн-факториал»). С помощью этого обозначения формула для полного числа размещений упрощается и принимает вид

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Заметим, что в силу  $A_0^0 = 1$ , имеет смысл считать (*по определению*)  $0! = 1$ . Тогда данная формула будет верной для любых  $0 \leq k \leq n$ .

Размещение из  $n$  элементов по  $n$  называется *перестановкой* из  $n$  элементов. Число всех перестановок из  $n$  элементов  $P_n = n!$ .

Согласно своему определению, размещения могут отличаться друг от друга как составом своих элементов, так и порядком их следования.

Если же порядок следования элементов в выборке не существен, то такую выборку  $k$  элементов из  $n$  принято называть *сочетанием* из  $n$  элементов по  $k$  элементов (иногда говорят: «сочетание из  $n$  по  $k$ »). Формула для  $C_n^k$  – числа всех сочетаний из  $n$  по  $k$  имеет вид

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Используя эту формулу, можно получить следующие полезные соотношения:  $C_n^k = C_n^{n-k}$  и  $(a+b)^n =$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Последнее равенство носит название *формулы бинома Ньютона* и является обобщением некоторых формул сокращенного умножения, приведенных в 2°.

## 9°. Последовательности и прогрессии

Будем говорить, что задана *числовая последовательность*, если указано правило, по которому каждому натуральному числу (номеру)

$n$  поставлено сопоставлено единственное число  $x_n$ , называемое значением  $n$ -го члена последовательности. Числовую последовательность принято обозначать как  $\{x_n\}$ .

Числовая последовательность называется *арифметической прогрессией*  $\{a_n\}$ , если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным числом  $d$ , называемым *разностью прогрессии*. Таким образом, для задания арифметической прогрессии следует указать ее первый член и разность, тогда для любого номера  $n$  будет справедливо равенство  $a_{n+1} = a_n + d$ .

В арифметической прогрессии значение ее  $n$ -го члена может быть найдено по формуле  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ . Кроме того, справедливо равенство

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

для суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии.

Числовая последовательность называется *геометрической прогрессией*  $\{b_n\}$ , если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное число  $q$ , называемое *знаменателем прогрессии*. Для задания геометрической прогрессии следует указать ее первый член и знаменатель, тогда для любого номера  $n$  будет справедливо равенство  $b_{n+1} = b_n q$ .

В геометрической прогрессии значение ее  $n$ -го члена может быть найдено по формуле  $b_n = b_1 q^{n-1}$ . Кроме того, справедливо соотношение

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n = \begin{cases} b_1 n, & \text{если } q = 1, \\ b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, & \text{если } q \neq 1, \end{cases}$$

позволяющее находить сумму первых  $n$  членов геометрической прогрессии.

Наконец, если  $|q| < 1$ , то такая геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, и в последнем равенстве можно перейти к пределу при неограниченном возрастании  $n$ . Величина этого предела, называемая суммой бесконечно убывающей прогрессии, будет равна  $\frac{b_1}{1 - q}$ . Эта формула используется, например, для перевода записи дробных чисел из обыкновенной формы в десятичную и наоборот.

## 10°. Специальные обозначения и символы

В современных математических текстах допускаются некоторые стандартные обозначения, практически не применяемые в пособиях,

используемых при изучении математики в средней школе. Поскольку это обстоятельство может до некоторой степени усложнить освоение студентами курса математики, представляется целесообразным привести краткое описание этих стандартов и правил их использования.

1) *Символы общности и существования*

Символ *общности*  $\forall$  используется для замены слов “всякий”, “любой”, “для любого”, в то время как символ *существования*  $\exists$  заменяет слова “существует”, “найдется”. Например, определение ограниченной числовой последовательности: последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной, если

найдется неотрицательное число  $C$  такое, что для любого номера  $n$  будет выполнено неравенство  $|x_n| \leq C$ ,

может быть записано так: последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной, если

$$\exists C \geq 0 : \forall n : |x_n| \leq C .$$

2) *Символы суммирования и произведения*

Если необходимо записать выражение для суммы, в которой число слагаемых не имеет конкретного значения, но известно как зависит величина каждого слагаемого от его номера, то можно использовать специальный символ суммирования  $\sum_{k=1}^n a_k$ , указав при этом общий вид слагаемого и диапазон изменения индекса суммирования. Можно считать, что этот символ заменяет слова «сумма слагаемых вида  $a_k$  по  $k$  в пределах от 1 до  $n$ ».

Например, сумма

$$\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \dots + \sin(n-1) + \sin n$$

записывается как

$$\sum_{k=1}^n \sin k,$$

а сумма

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n}$$

представляется в виде

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k}$$

Аналогично, формула бинома Ньютона с помощью символа суммирования может быть записана как

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Например, при  $n = 4$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Подобный вид записи существует и для операции произведения. Например, равенство  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$  можно записать в виде  $\prod_{k=1}^n k = n!$ .

В заключение приведем следующие, используемые при решении многих задач высшей математики, формулы

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n - 1)^3 + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4};$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \sum_{k=1}^n \sin \alpha k = \frac{\sin \frac{(n + 2)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Отметим, что из этих соотношений следует любопытное равенство

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

## 11°. Полезные неравенства

Для любых двух неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  верно *неравенство Коши*

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

которое иногда используется в следующей форме: для любых двух вещественных чисел  $x$  и  $y$  справедливо соотношение

$$x^2 + y^2 \geq 2|xy|.$$

Неравенство Коши верно и для большего числа неотрицательных чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n}.$$

Отметим, что с помощью символов суммирования и умножения последнее соотношение можно записать как

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}.$$

В большом числе прикладных задач необходимые оценки могут быть получены при помощи, вытекающего из формулы бинорма Ньютона и верного для любого  $x$  и любого  $a > -1$ , *неравенства Бернулли*

$$(1 + a)^x \geq 1 + xa.$$

## Замечания о роли точности определений и формулировок

В процессе изучения математики следует обращать особое внимание на полноту и точность *определений, формулировок теорем и описания свойств*. Недопустима как избыточность (излишняя многословность) подобных лексем, так и потеря каких-либо их деталей.

Проиллюстрируем это следующими примерами.

1°. *Арифметический квадратный корень*. Как это уже было отмечено, по определению арифметического квадратного корня считается, что  $\sqrt{a^2} = |a|$ . Может возникнуть вопрос: «Не проще ли положить, что  $\sqrt{a^2} = a$ ?»

Что бы показать некорректность такого определения, рассмотрим следующую цепочку преобразований: для *любой* пары чисел  $x$  и  $y$  будут верными равенства

$$\begin{aligned}x^2 - 2xy + y^2 &= y^2 - 2yx + x^2, \\(x - y)^2 &= (y - x)^2, \\\sqrt{(x - y)^2} &= \sqrt{(y - x)^2}.\end{aligned}$$

Если теперь применить определение вида  $\sqrt{a^2} = a$ , то мы получим

$$x - y = y - x \quad \Rightarrow \quad x = y,$$

что очевидно  $\forall x, y$  неверно. В то время как использование определения  $\sqrt{a^2} = |a|$  дает

$$|x - y| = |y - x| \quad \Rightarrow \quad 0 = 0,$$

что верно для любой пары чисел  $x$  и  $y$ .

2°. *Сколько корней может иметь квадратное уравнение?*

Рассмотрим три следующих утверждения А), В) и С):

А) Уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  – квадратное.

В) Квадратное уравнение не может иметь более двух корней.

С) Для любых, попарно неравных чисел  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  уравнение

$$\frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} + \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(x - \gamma)(x - \alpha)}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} = 1$$

может быть приведено к виду А) и при этом оно очевидно имеет три различных корня  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \gamma$ .

Понятно, что утверждения А), В) и С) противоречивы в своей совокупности. Иначе говоря, одно из них ошибочное и, на первый взгляд, наибольшие сомнения вызывает утверждение С). Однако, оно на самом деле верное, а ошибка содержится в утверждении А). Дело в том, что квадратным называется уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  с  $a \neq 0$ . И именно для него верно утверждение В). В нашем же случае, если привести уравнение С) к виду, указанному в утверждении А), коэффициент при  $x^2$  окажется равным нулю. Более того, это уравнение примет вид  $1 = 1$ , то есть является *тождеством* – верным равенством при любом значении  $x$  (в том числе и при  $x_1 = \alpha$ ,  $x_2 = \beta$ ,  $x_3 = \gamma$ ).

3°. *Можно ли произвольно группировать слагаемые в сумме?* Конечно бы ассоциативность операции сложения для чисел позволяет дать положительный ответ на данный вопрос. Однако это верно лишь для сумм с *конечным* числом слагаемых. Если число слагаемых в сумме

не ограничено, то возможно возникновение ситуации подобной следующей. Согласимся “на веру” с утверждением, что сумма неограниченного числа нулей равна нулю, и рассмотрим сумму вида

$$A = 1 + 2 - 3 + 1 + 2 - 3 + 1 + 2 - 3 + 1 + 2 - 3 + 1 + 2 - 3 + \dots$$

сгруппировав слагаемые сначала как

$$A = (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + \dots$$

придем к заключению, что  $A = 0$ , поскольку каждая сумма в скобках дает ноль. Однако, при другом способе группировки

$$A = 1 + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + \dots$$

получаем  $A = 1$ . Что означает неприменимость сочетательного правила для сумм с неограниченным числом слагаемых.

Последний пример наглядно демонстрирует, что с «бесконечностью» нельзя оперировать как с обычным числом.

Стоит также отметить, что методологически аналогичные проблемы могут возникнуть и в случае подмены понятий «отсутствие определенности» и «существование вероятности», которая нередко допускается при рассуждениях на интуитивном уровне.