ddhead

Пространство R^n

Напомним предварительно, что термин *функция* обозначает совокупность двух числовых множеств — *области определения* (*множества аргументов*) и *множества значений* , а также *правила*, по которому каждому числу из области определения ставится в соответствие единственное число из множества значений.

Вполне естественно допустить, что возможна ситуация, когда значение функции зависит от более, чем одного числового аргумента. В этом случае можно ввести понятие функции нескольких (многих) переменных, например, так:

> Будем говорить, что задана *функция многих переменных*, если указано правило, по которому для каждого фиксированного набора упорядоченных вещественных чисел $\{x_1, x_2, \ldots , x_n\}$ поставлено в соответствие единственное число из множества значений.
>
> Функцию многих переменных будем обозначать так $f\big(x\big)$ или, более детально, $f\big(x_1, x_2, \ldots , x_n\big)$. Здесь x (без индекса) обозначает весь набор $x = \{x_1, x_2, \ldots , x_n\}$.

Это определение полностью аналогично определению функции, зависящей от одной переменной, и его можно будет использовать так же эффективно, если мы преодолеем следующее затруднение.

При описании или исследовании свойств функции одной переменной $f(x)$ существенным являлось сравнение величин изменения значений как функции, так и ее аргумента. Для этой цели мы использовали модули разности соответствующих чисел, то есть, $|\,x_{(1)} - x_{(2)}\,|$ и $|\,f(x_{(1)} - f(x_{(2)})\,|$.

В случае функции многих переменных модуль разности годится для оценки степени близости значений функции. Однако возникает вопрос: как оценить степень близости двух наборов упорядоченных чисел, скажем, таких

$$\{x_{1(1)},\, x_{2(1)},\, \ldots\, ,\, x_{n(1)}\} \quad \text{и} \quad \{x_{1(2)},\, x_{2(2)},\, \ldots\, ,\, x_{n(2)}\}\,.$$ [1]

[1] Договоримся, что нижний индекс без скобок является номером переменной, а нижний интекс в скобках — номер набора переменных.

Возможным способом построения нужной нам оценки степени близости, которая по сути есть расстояние между такими наборами, является следующий.

Рассмотрим совокупность всевозможных упорядоченных наборов, состоящих из n упорядоченных вещественных чисел, каждый их которых будем записывать в матричной форме в виде n-компонентной строки $\| x_1 \, x_2 \, \dots \, x_n \|$. Эту совокупность будем обозначать как R^n.

Вначале превратим R^n в n-мерное *линейное пространство*, введя по определению в этом множестве понятия:

— *равенства элементов*

$$\| x_1 \, x_2 \, \dots \, x_n \|_{(1)} = \| x_1 \, x_2 \, \dots \, x_n \|_{(2)} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x_{1(1)} = x_{1(2)} \, , \\ x_{2(1)} = x_{2(2)} \, , \\ \dots \\ x_{n(1)} = x_{n(2)} \, . \end{array} \right.$$

— *суммы элементов*

$$\| x_1 \, x_2 \, \dots \, x_n \|_{(1)} + \| x_1 \, x_2 \, \dots \, x_n \|_{(2)} =$$

$$= \| \, x_{1(1)} + x_{1(2)} \quad x_{2(1)} + x_{2(2)} \quad \dots \quad x_{n(1)} + x_{n(2)} \, \| \, .$$

— *умножения числа на элемент*

$$\lambda \, \| x_1 \, x_2 \, \dots \, x_n \| \; = \; \| \, \lambda \, x_1 \; \lambda \, x_2 \; \dots \; \lambda \, x_n \, \| \, .$$

Затем, поскольку в линейном пространстве нет метрических характеристик (таких как, длина, расстояние, величина угла), то превратим R^n еще и в *евклидово пространство*, введя операцию *скалярного произведения элементов* $x = \| x_1\, x_2, \ldots\, x_n \|$ и $y = \| y_1\, y_2, \ldots\, y_n \|$ по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\,.$$

Скалярное произведение позволяет использовать для элементов в R^n такие понятия как

— *норма (длина) элемента* x $\quad |x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}\,.$

— *расстояние между элементами* x *и* y

$$\rho(x,y) = |\, x - y\,| = \sqrt{(x-y, x-y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\,. \quad (1.1)$$

Заметим, что элемент $x - y$ существует в R^n для любой пары элементов x и y, поскольку в R^n (как в линейном пространстве) элемент $x - y$ есть сумма x и $(-1)y$.

В каждом евклидовом пространстве для двух произвольных элементов x и y справедливы следующие соотношения:

— неравенство *Коши-Буняковского* $|(x,y)| \leq |x|\,|y|$, которое в R^n имеет вид

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)}$$

— неравенство *треугольника* $|x+y| \leq |x|+|y|$, что в R^n будет

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(x_k + y_k\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}\ .$$

Приведем (для справки) некоторые определения специальных элементов и подмножеств в R^n .

Определение 1.1	Множество элементов x таких, что $\rho(x,x_0) \le r$, нызывается *шаром* или *окрестностью* радиуса r с центром в x_0 .
Определение 1.2	Окрестность элемента x_0 называется *проколотой*, если она состоит из элементов x_0, для которых $0 < \rho(x,x_0) \le r$.
Определение 1.3	Элемент x_0 называется *внутренним* для множества $M \subset R^n$, если $x_0 \in M$ вместе с некоторым шаром ненулевого радиуса , с центром в x_0.
Определение 1.4	Множество M называется *открытым*, если все его элементы внутренние.

Определение 1.5	Элемент x_0 называется *предельной точкой* множества M, если в любой окрестности этого элемента имеется хот бы один элемент из M.

Предельная точка множества M может как принадлежать, так и не принадлежать M.

Определение 1.6	Множество M называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре с ненулевым радиусом.

Определение 1.7	Множество M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 1.8	Элемент x называется *граничным*, если в любой его окрестности имеются как точки, принадлежащие M, так и не принадлежащие этому множеству.

Определение 1.9	Говорят, что множество элементов $$\|x(t)\| = \|\, x_1(t)\, x_2(t)\ \ldots\ x_n(t)\,\|\,,$$ образует *линию* в R^n, если $x_k(t)\ \forall k=\overline{1,n}$ суть непрерывные при $t \in [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ функции.

Определение 1.10	Множество M называется *связанным*, если две любые его точки можно соединить линией, целиком принадлежащей M.

Определение 1.11	Открытое и связанное множество называется *областью.* Замкнутое и ограниченное множество называется *компактом.*

Определение 1.12	*Уровнем* функции $f(x)$ называется совокупность элементов в R^n таких, что $f(x) = c \in (R)\,.$ В случае $n = 2$ говорят о *линии уровня,* а в случае $n = 3$ используется термин *поверхность уровня.*

При небольших значениях n также принято не использовать индексацию компонентов элемента x, а применять для их обозначения разные символы.

Пример 1.1.1. Найти для $z = f(x,y) = e^{2xy} - e^{xy} + 2$ область определения, область значения и линии уровня

1. В данном случае $n = 2$ и все операции, использованные в формуле задающей функцию выполнимы при любых x и y, поэтому область определения есть открытое множество вида $x \in (-\infty, +\infty)$ и $y \in (-\infty, +\infty)$.

2. Поскольку верно равенство

$$z = f(x,y) = \left(e^{xy} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

то областью значений будет полуинтервал, для которого $z \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$.

3. Линиями уровня для данной функции очевидно будут линии $xy = const$, то есть, гиперболы, примые (оси координат), либо точка (начало координат).

$$z = f(x,y) = \left(e^{xy} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4},$$

то областью значений будет полуинтервал, для которого $z \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$.

Предел и непрерывность

В пространстве R^n дадим

Определение 1.13	Будем говорить, что в R^n задана последовательность элементов $\{x_{(k)}\}$, если для каждого натурального числа k однозначно определен некоторый элемент $\| x_{1(k)}\ x_{2(k)}\ \ldots\ x_{n(k)} \| \in R^n$.

Заметим, что в этом случае каждая компонента $\{x_{(k)}\}$, то есть, $\{x_{j(k)}\}\ \ \forall j = \overline{1, n}$, является обычной числовой последовательностью.

Теперь мы можем ввести понятие предела последовательности элементов в R^n.

Определение 1.14	Элемент $a \in R^n$ называется *пределом* последовательности $\{x_{(k)}\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n \geq N_\varepsilon\ \ \rho(x_n, a) < \varepsilon$.

Символически это принято обозначать так $\lim\limits_{k\to\infty} x_{(k)} = a$.

Как нетрудно заметить, данное определение повторяет определение предела числовой последовательности, в котором $|\, x_n - a\,|$ заменен на $\rho(x_n, a)$.

Теперь мы может дать такие определения предела функции многих переменных

Определение 1.15 (по Гейне)	Число A называется *пределом* функции $f\left(x\right)$ на элементе (в точке) $a \in R^n$, если для *любой* последовательности $\{x_{(k)}\}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{(k)} = a$, $x_{(k)} \neq a$, имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{(k)}\right) = A$.

а также, равносильное ему,

Определение 1.16 (по Коши)	Число A называется *пределом* функции $f\left(x\right)$ на элементе (в точке) $a \in R^n$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих $0 < \rho(x,a) < \delta_\varepsilon$, выполняется $\left\|f(x) - A\right\| < \varepsilon$.

Символически предел функции многих переменных принято обозначать $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Пределы вида 1.15 (или 1.16) называются *пределами в точке* (или, просто, *пределами*). Помимо них, для функций многих переменных рассматривают, так называемые, *повторные пределы*, являющиеся последовательным вычислением обычных пределов по всем переменным. Например, при $n = 2$ для функции $f(x, y)$ можно указать два повторных предела вида

$$\lim_{y\to b}\bigl(\lim_{x\to a} f(x,y)\bigr) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to a}\bigl(\lim_{y\to b} f(x,y)\bigr)\,.$$

Для функции, зависящей от n переменных число различных повторных пределов равно $n!$.

Изменение порядка предельных переходов по отдельным переменным в повторных пределах, вообще говоря, не допустимо. Например, для функции $u(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ имеем

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = -1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = 1\,.$$

Пример 1.1.2. Показать, что для функции

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^k y}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{если} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

кратный предел в начале координат существует для $k=2$ и не существует при $k=1$.

Решение. 1. Пусть $k = 2$. Применим определение 1.1.16 (по Коши) и покажем, что

$$\lim_{\|x,y\|\to\|0,0\|} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Действительно, $\forall\varepsilon>0$ можно взять $\delta_\varepsilon=\varepsilon$, для которого

$$|x| \leq \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta_\varepsilon = \varepsilon \qquad \forall y\,.$$

С другой стороны, в силу неравенства Коши,

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = |x|\frac{|x||y|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|}{2} < \varepsilon$$

на любой траектории, ведущей в начало координат.

2. Рассмотрим другой метод решения. Перейдем в полярную систему координат, тогда из

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

следует

$$\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2\varphi\, r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,.$$

Но это выражение стремится к нулю, поскольку на любой траектории, ведущей в начало координат, то есть, $\forall\varphi(r)$ имеет место $r \to 0$.

3. Разберем теперь случай с $k = 1$. Здесь удобнее использовать определении (точнее, отрицание определения) по Гейне.

Конкретно, для того, чтобы функция $u(x, y)$ не имела предела в точке $\| x_0\, y_0 \|$, достаточно найти две различные последовательности $\Big\{ \| x_{(1)m} \;\; y_{(1)m} \| \Big\}$ и $\Big\{ \| x_{(2)m} \;\; y_{(2)m} \| \Big\}$, $\|$ сходящиеся в R^2 при $m \to \infty$ к предельной точке, на которых числовые последовательности

$$u\Big(x_{(1)m}\,,\; y_{(1)m}\Big) \qquad \text{и} \qquad u\Big(x_{(2)m}\,,\; y_{(2)m}\Big)$$

имеют различные пределы.

Для Примера 1.1.2 такими последовательностями могут служить, сходящиеся к началу координат, последовательности вида $\left\{ \left\| \begin{matrix} \frac{1}{m} & 0 \end{matrix} \right\| \right\}$ и $\left\{ \left\| \begin{matrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{matrix} \right\| \right\}$.

Для первой из них, мы идем в нанало координат по оси Ox И для этой последовательности будет

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m}\cdot 0}{\frac{1}{m^2}+0^2} = 0\,.$$

Для второй, мы идем в нанало координат по биссектрисе первого координатного угла В этом случае имеем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, согласно отрицанию определения предела по Гейне, функция, указанная в формулировке Примера 1.1.2, при $k = 1$ в начале координат пространства R^2, предела не имеет.