Математическое моделирование. Основные понятия и определения

Полезность математического моделирования заключается в возможности получения информации о свойствах и характере поведения изучаемого объекта без проведения (часто сложных или дорогостоящих) экспериментов в натуре, что может оправдывать затраты на преодоление затруднений, возникающих в процессе разработки или при попытках использования математических моделей.

Основное затруднение, преодоление которого оказывается необходимым в математическом моделировании, заключается в обеспечении *адекватности* этой модели исследуемому объекту. Другими словами, пользователю необходимо выяснить, насколько точно данная модель отражает реальную ситуацию и насколько надежные количественные оценки могут быть получены в процессе работы с этой моделью.

Опыт математического моделирования, накопленный в течение последних нескольких десятилетий, показывает, что проблема адекватности в ряде случаев может быть успешно преодолена. Примером служат многочисленные решенные физические и технические задачи. С другой стороны, попытки применения методов математического моделирования для исследования объектов социально-экономической природы приводят к заключению: несмотря на естественное желание учесть в модели все факторы, существенно влияющие на функционирование исследуемого объекта, добиться этого исключительно трудно, а иногда даже невозможно.

Если построение математической модели, учитывающей с достаточной степенью точности все факторы, являющиеся существенными для исследуемого объекта, оказывается невозможным, то следует отказаться от стандартной методологии ее использования и попытаться действовать иным способом, основанном на изменении постановок решаемых задач и включении пользователя в процесс поиска решений. Предметом дальнейшего рассмотрения в нашем курсе является описание альтернативной методологии математического моделирования, не требующей выполнения условия адекватности в полной мере.

Определение 1.1. Под *математической моделью* понимается формализованный (то есть, представленный в виде математических соотношений) набор правил, описывающих факторы, существенно влияющие на состояние и функционирование исследуемого объекта, и соответствующее этому набору информационное обеспечение.

Процесс построения и использования математической модели для решения с ее помощью конкретных задач принято называть *математическим моделированием*.

Описание математической модели выполняется в терминах количественных характеристик – *показателей* (*переменных*, *неизвестных*), значения которых подлежат определению и *параметров*, величины которых априорно известны.

Значения показателей, как правило, должны удовлетворять системе условий, задаваемых в виде ограничений, связей, целей и т.п., являющихся математической формулировкой существенных факторов.

Определение 1.2. Условия, выполнение которых безусловно необходимо, называются *обязательными* (*необходимыми*), тогда как условия, выполнение которых желательно, но необязательно, называются *целевыми* (*желательными*).

В рамках настоящего курса рассматриваются только математические модели, описание которых выполняется при помощи конечного числа показателей и налагаемых на их значения условий.

Набор конкретных значений всех показателей и параметров математической модели называется *состоянием* модели. Набор условий (как обязательных, так и целевых) для конкретного списка показателей и значений параметров будем называть *задачей* для математической модели.

Состояния модели, которые удовлетворяют набору условий задачи, являются ее *решением*. Процедура поиска значений показателей математической модели при заданных конкретных условиях и значениях ее параметров называется *процессом решения* задачи.

Определение 1.3. Состояние математической модели (или решение задачи),

- для которого не нарушено ни одно из обязательных ограничений или условий связи, называется *допустимым* или *совместным*.
- нарушающее хотя бы одно из обязательных ограничений или условий связи между показателями, называется *недопустимым* или *несовместным*.
- удовлетворяющее всем содержащимся в ее описании целевым условиям, называется *желательным* или *целевым*.

Вполне очевидно, что в общем случае может не существовать состояния математической модели, которое было бы одновременно и допустимым, и желательным. В этом случае достаточно часто возникает задача оценки степени нарушения целевых условий для различных ее допустимых состояний.

Определение 1.4. Допустимое состояние модели, в минимальной (в некотором, заранее определенном смысле) степени нарушающее содержащиеся в ее описании целевые условия, называется *оптимальным*.

Наконец, дадим

Определение 1.5. Математические модели, в которых учтены с приемлемой степенью точности все факторы, существенно влияющие на функционирование исследуемого объекта, назовем *полными*.
Неполными будем называть математические модели, в состав которых включены описания лишь некоторой части, существенно влияющих на функционирование исследуемого объекта факторов.

Прочие существенные факторы (не формализуемые с достаточной степенью точности или неизвестные вовсе) не учитываются в неполной модели.

Таким образом, предполагается, что все факторы, существенно влияющие на функционирование моделируемого объекта, можно разделить на три следующие группы:

- факторы, поддающиеся формализации с приемлемой степенью точности;
- факторы известные, но не формализуемые с необходимой точностью;
- факторы, существенно влияющие на характер функционирования исследуемого объекта, однако неучтенные или неизвестные вовсе;

в неполную математическую модель включаются только факторы, относящиеся к первой группе.

СРАВНЕНИЕ ПОЛНЫХ И НЕПОЛНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Полные математические модели могут применяться для решения задач имитации (прогнозирования) функционирования или оптимизации характеристик исследуемого объекта или явления. Заметим, что попытки же имитирования поведения исследуемого объекта, построения прогноза, поиска его оптимальных или равновесных состояний для неполных математических моделей являются некорректными.

Некорректность использования методологии полного моделирования может быть обусловлена:

- неточностью математических описаний (формулировок) отдельных элементов модели, например из-за трудностей получения достоверных значений их параметров или неполнотой информационного обеспечения модели;
- некорректностью применения математического аппарата для формализованного описания некоторых из факторов, существенно влияющих на поведение моделируемого объекта;
- подозрением о наличии неизвестных существенных факторов.

В случае, когда нет возможности гарантировать адекватность модели, альтернативные корректные постановки задач могут быть получены, исходя из естественного требования достоверности решений, путем замены традиционной проверки выполнения *достаточных* условий достоверности проверкой выполнения ее *необходимых* условий.

Например, в задачах имитации функционирования некоторого объекта выполнение достаточных условий достоверности позволяет ответить на вопрос: *Что произойдет в том случае, если...?* С другой стороны, выполнение необходимых условий достоверности гарантирует корректность лишь вопроса: *Чего не может произойти в том случае, если...?* Использование вопроса первого типа в случае работы с неполной моделью может приводить к недостоверному результату, в то время, как ответ на второй вопрос всегда будет достоверен.

Действительно, пусть было установлено, что одно из состояний некоторой модели допустимо, а другое – недопустимо. Если в эту модель включить дополнительное условие (неучтенное или неизвестное в момент получения решений), то решение, идентифицированное ранее как недопустимое, таковым и останется. Допустимое же решение после пополнения рассматриваемой модели, вообще говоря, допустимым уже может и не быть. Отсюда следует, что ответ на вопрос первого рода достоверен лишь для полных математических моделей, а ответ на вопрос второго рода достоверен как для полных, так и для неполных моделей.

Аналогичная ситуация имеет место и для оптимизационных задач. Поясним это несложным примером. Допустим, что требуется распределить поровну между десятью сотрудниками некоторой фирмы сумму в 10 000 рублей так, чтобы каждый получил как можно больше.

Решение, при котором на одного сотрудника приходится по 1500 рублей, является недопустимым, а в то время, как решение: выдать каждому по 1000 рублей – оптимальным. Если же теперь в постановку задачи добавить условие, заключающееся в необходимости выплаты 15-ти процентного налога, то решение о выплате каждому из сотрудников по 1000 рублей уже не будет оптимальным – оно станет недопустимым. Первое же решение (о выплате по 1500 рублей) осталось недопустимым. Оно является таковым независимо от факта, было ли учтено в модели условие выплаты налога или нет.

Таким образом, процедура решения задач при помощи неполных моделей может быть разделена на два этапа:

- на первом – в автоматическом режиме все состояния неполной математической модели разделяются на два множества: множество недопустимых состояний и множество всех остальных, последнее из которых будем называть *множеством условно допустимых состояний*, ибо, строго говоря, они лишь "подозреваются на допустимость";
- затем пользователь анализирует это "подозрительное" множество (привлекая в случае необходимости не формализуемые или даже интуитивные соображения), сужает его, пополняя модель новыми обязательными условиями.

Процедурная пара "работа ЭВМ" – "анализ пользователя" может применяться при необходимости неоднократно до тех пор, пока пользователь не обнаружит состояние, которое он сочтет "приемлемым решением" или же установит факт отсутствия такового.

Основное преимущество этой схемы решения состоит в том, что пользователь (а не ЭВМ!) выбирает состояние модели, принимаемое за решение. ЭВМ лишь контролирует его выбор, не позволяя пользователю осуществлять данный выбор на множестве недопустимых состояний.

Таким образом, если в случае полной модели пользователь получает автоматически рассчитанное компьютером окончательное решение в виде оптимального вектора, варианта прогноза или имитирующей траектории, то для неполных моделей функция ЭВМ заключается лишь в отделении множества состояний модели, идентифицированных как недопустимые. Роль пользователя неполной модели заключается в последующем уточнении результата (возможно, до полной однозначности), исходя из собственных, не обязательно формализуемых или, быть может, даже интуитивных соображений.

Нужно заметить, что в традиционной практике математического моделирования, основанной на применении полных моделей, достаточно часто автоматически находимое решение вызывает у пользователя (явно или неявно) негативное отношение, порождаемое именно претензией модели на учет всех существенных факторов и, как следствие, претензией решения на оптимальность. Здравый смысл подсказывает, что для объектов социально-экономической природы, например, не следует полагаться только на формальные методы и не стоит пренебрегать опытом и интуицией пользователя, но и даже предпочтительно поощрять использование последних.

Схема неполного моделирования в этом смысле выглядит более привлекательной, ибо ЭВМ (при помощи математических методов) всего лишь сужает множество состояний модели, из которых пользователь должен сделать выбор окончательного решения. Иными словами, программно-аппаратный комплекс не имеет своей функцией поиск окончательного решения вместо пользователя, а только предохраняет последнего от возможных количественных ошибок в процессе учета существенных факторов, поддающихся формализации.

Процедура сужения множества условно допустимых состояний

Сужение множества условно допустимых состояний для неполной математической модели состоит в пополнении набора формализуемых ограничений некоторыми дополнительными условиями. Процедуру включения в математическую модель некоторого числа дополнительных условий (связей, ограничений и т.п.) будем называть *пополнением* этой модели.

Пополнение, очевидно, возможно как для полных, так и для неполных моделей. Однако, отличие этих случаев состоит в том, что включение в полную математическую модель некоторого добавочного условия (ограничения, связи и т.п.) может превратить решение, идентифицированное как допустимое (или оптимальное) в недопустимое, в то время как решение, определенное в неполной модели как недопустимое, останется таковым в случае включения в нее любого дополнительного условия или ограничения.

Следует отличать пополнение математической модели от ее *модификации*. Последняя допускает изменение формулировок отдельных условий, уже входящих в описание исходной модели. Пополнение же заключается во включении в состав модели некоторого дополнительного условия без какого-либо изменения других ее элементов. Модификация математической модели часто оказывается необходимой как на этапе разработки, так и в процессе ее эксплуатации, однако результат модификации всегда должен рассматриваться как некоторая новая неполная модель. В равной степени это относится и к удалению какого-либо условия из модели.

Общая схема решения задач для неполных математических-моделей

Резюмируя все изложенное выше, можно сказать, что методологическая основа неполного моделирования заключается в сочетании автоматического анализа неполных моделей и вовлечения пользователя непосредственно в процесс поиска решения.

В целом процесс решения разбивается на шаги – итерации, для каждой из которых ЭВМ выполняет количественный анализ неполной математической модели, отыскивая некоторое ее состояние (решение задачи), удовлетворяющее всей совокупности обязательных условий, включенных пользователем в формализованное описание на данной итерации, после чего пользователь осуществляет пополнение или модификацию модели.

Пополнение или модификация выполняются пользователем на основе неформализуемых критериев или оценок до тех пор, пока не будет получено состояние, идентифицируемое как приемлемое решение, или же установлен факт отсутствия такого решения.

Отметим, что при этом центральной технической проблемой оказывается задача отделения множества недопустимых состояний модели.

Для успешного использования схемы неполного моделирования на практике необходимо преодолеть два технических затруднения, возникающих в процессе анализа множества состояний модели, которые не были отнесены к недопустимым (то есть множества условно допустимых состояний):

- во-первых, следует решить проблему представления этого множества в ЭВМ в виде, удобном для анализа,
- во-вторых, необходимо предусмотреть возможность возникновения ситуации, когда анализируемое множество оказывается пустым.

Известно, что в компьютере достаточно легко представляются лишь отдельные состояния математической модели, например, последовательным перечислением значений всех ее показателей. В случае полной модели такое ограничение не имеет принципиального характера, поскольку автоматически рассчитываемое оптимальное решение или имитационный прогноз обычно являются именно конкретным состоянием модели. Однако в схемах неполного моделирования возможность анализа множества условно допустимых состояний в целом является принципиально необходимой. Пользователь должен иметь в своем распоряжении инструмент, позволяющий выполнять такой анализ для случая множеств достаточно сложной структуры.

Отмеченное затруднение можно преодолеть, воспользовавшись специальным приемом, который заключается в применении *метрики* – способа количественной оценки близости множеств допустимых и целевых состояний неполной модели.

Как и множество допустимых состояний, множество желательных состояний задается пользователем в математической модели набором условий, связей или ограничений, налагаемых на значения ее показателей и отражающих цели, приоритеты или же отношения предпочтения пользователя.

В процессе автоматической работы ЭВМ не только отделяет множество недопустимых состояний, но и находит среди оставшихся (условно допустимых) состояний решение, наименее "удаленное" от множества желательных состояний.

Применение метрики, дающей количественную оценку степени близости множеств допустимых и целевых состояний позволяет пользователю на каждом шаге работы с математической моделью ограничиваться анализом лишь отдельной точки множества допустимых состояний, не рассматривая это множество целиком. Свобода выбора состояний из множества допустимых состояний может быть реализована пользователем при помощи пополнения или коррекции наборов обязательных и/или целевых условий математической модели.

При этом предполагается, что пользователь может сформулировать свою оценку текущего значения каждого из показателей модели, используя, быть может, не формализуемые или даже интуитивные критерии в одном из следующих видов:

- значение показателя приемлемо;
- значение показателя желательно изменить;
- значение показателя необходимо изменить.

Если значения всех показателей признаны пользователем приемлемыми, то решение получено. В противном случае необходимо продолжить пополнение неполной математической модели или ее корректирование.

Необходимость пополнения модели обуславливается не наличием каких-либо ошибок (хотя такую возможность исключать не следует), а принципиальной неполнотой анализируемой модели, которая выявляется, как правило, лишь в процессе решения задач.

Наиболее простой и эффективный способ пополнения математической модели состоит в изменении множества допустимых состояний, заключающемся во введении новых условий, связей или ограничений, то есть просто в сужении этого множества.

Если в результате включения дополнительных условий множество допустимых состояний оказалось непустым, то пополнение считается завершенным успешно.

Однако достаточно часто добавление новых условий или связей превращает систему формализованных обязательных условий в противоречивую, то есть в систему, для которой не существует ни одного допустимого состояния.

В этом случае пользователю следует вернуться к предыдущему шагу процесса поиска решения и выполнить пополнение не во множестве *допустимых*, а для *желательных* состояний. Найденное значение метрики покажет величину возникшего в процессе пополнения рассогласования обязательных условий модели.

Последовательно выполняемое пополнение математической модели приводит или к выявлению полностью приемлемого состояния, или же устанавливает факт его отсутствия.

ОПИСАНИЕ
ЛИНЕЙНЫХ НЕПОЛНЫХ МОДЕЛЕЙ

Структура линейной неполной математической модели, используемой в программах "БАЛАНС" и "MultiLC"

Основой неполной математической модели является упорядоченный n-компонентный *список показателей* – величин, значения которых характеризуют состояние модели.

(Термин *показатель* может быть заменен словами *переменная* или *неизвестная*).

Описание математической модели включает также дополнительные числовые характеристики этих показателей – *атрибуты*,

- частично задаваемых в качестве *исходных данных* и
- частично рассчитываемых в автоматическом режиме как *решение*.

К атрибутам - *исходным данным*, которые может задавать пользователь, относятся:

- границы обязательного (допустимого) диапазона значений показателей;
- границы желательного (целевого) диапазона значений показателей;
- коэффициенты линейных зависимостей между показателями.

К автоматически рассчитываемым атрибутам - *решениям* - в первую очередь относятся:

- значения показателей;
- минимально возможные величины нарушения границ обязательного диапазона;
- минимально возможные величины нарушения границ диапазона желательных значений;

Пусть общее число показателей равно n, а значение показателя с номером k обозначается ξ_k, где $k = [1, n]$, то есть, k принимает значения от 1 до n.

Обязательные ограничения и связи

Границы допустимого диапазона значений показателя

Главными атрибутами показателя являются границы диапазона его *допустимых* (*обязятельных*) значений. Конкретно диапазон допустимых значений определяется заданием *нижней* и *верхней границ* этого диапазона.

В режиме автоматического расчета значений показателей выполняется поиск такого состояния модели, для которого *ни одна* из границ обязательного диапазона не оказывается нарушенной. Такие состояния модели называются *допустимыми* (или *совместными*).

Если же таких состояний не обнаруживается, то автоматическая обработка модели завершается. Состояния модели, в которых нарушена хотя бы одна граница допустимого диапазона, называются *недопустимыми* (или *несовместными*).

Формально множество допустимых значений показателей модели определяется системой двусторонних ограничений следующего вида.

Обозначим через d_k и D_k соответственно *величины нижних и верхних границ допустимого диапазона значений* k-го показателя ξ_k. Тогда множество допустимых состояний модели будет задаваться системой неравенств: $d_k \le \xi_k \le D_k$, где $k = [1, n]$.

Значения границ допустимых (обязательных) диапазонов величин показателей могут быть любыми вещественными числами, удовлетворяющими неравенствам: $d_k \le D_k$, $k = [1, n]$.

Равенство верхней и нижней границ возможно, в этом случае показатель сможет принимать лишь единственное значение.

Часть границ допустимых (обязательных) диапазонов может отсутствовать или же быть установленной "по умолчанию". Если значение некоторого показателя не ограничено сверху, то предполагается равенство этой границы "плюс бесконечности", моделируемой достаточно большим положительным числом. Аналогично, в случае отсутствия нижней границы предполагается ее равенство "минус бесконечности", представляемой достаточно большим по абсолютной величине отрицательным числом.

По умолчанию для всех показателей модели нижние границы допустимого диапазона устанавливаются равными нулю, а верхние предполагаются отсутствующими. Таким образом, пользователю необходимо указывать в модели допустимые границы лишь в тех случаях, когда эти границы реально существуют.

Задание связей между показателями

Показатели в неполной математической модели могут быть связаны друг с другом *линейными* зависимостями. Условие линейности означает, что зависимости между величинами показателей являются линейными однородными функциями, то есть, один показатель представим в виде суммы других показателей, умноженных на некоторые постоянные коэффициенты.

По соображениям повышения практической эффективности каждый показатель модели может явно зависеть *только лишь от стоящих ранее него в списке показателей*, то есть, от показателей, номера которых меньше, чем номер данного показателя.

Это означает, что линейная функция, выражающая зависимость между показателями, имеет следующий вид:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki}\xi_i\,, \quad \text{где } k = [2, n],$$

где величины A_{ki} являются фиксированными *коэффициентами линейных связей между показателями* рассматриваемой модели.

Значения коэффициентов A_{ki} в уравнениях связи полагаются *по умолчанию равными нулю*.

Совокупность *всех* состояний модели, удовлетворяющих как обязательным ограничениям, так и связям будем *называть множеством допустимых состояний*.

Целевые ограничения

При помощи целевых диапазонов в математической модели формализуются предпочтения и приоритеты пользователя. При этом формализуемые цели и предпочтения *могут конфликтовать* (*быть в противоречии*) как друг с другом, так и с обязательными условиями и связямти.

Обозначим через r_k и R_k соответственно *величины нижних и верхних границ целевого диапазона значений* k-го показателя ξ_k. Тогда множество целевых состояний модели будет задаваться системой неравенств: $r_k \le \xi_k \le R_k$, где $k = [1, n]$.

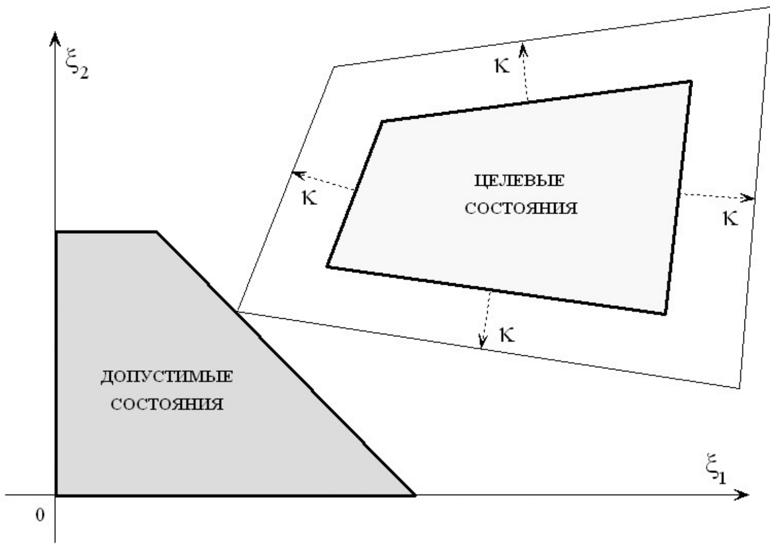
Для значений границ целевых диапазонов показателей также предполагается выполнение условий: $r_k \le R_k$, где $k = [1, n]$.

По умолчанию для всех показателей модели как нижние, так и верхние границы целевого диапазона *предполагаются отсутствующими*.

Совокупность *всех* состояний модели, удовлетворяющих целевым ограничениям будем *называть множеством желательных* (*целевых*) *состояний*.

Количественная оценка близости множеств допустимых и целевых состояний

Процедура решения задач для конкретной неполной математической модели состоит из нескольких шагов, на каждом из которых пользователь получает некоторый результат автоматического расчета, анализирует его и выполняет необходимое пополнение или коррекцию этой модели.



В режиме автоматического расчета значений показателей находится *допустимое* состояние неполной модели, наименее удаленное от множества целевых состояний, т.е. выбирается состояние, *минимально нарушающее границы целевого множества.*

Это состояние для краткости будем называть *квазиоптимальным*.

Величина оценки степени близости множеств допустимых и целевых состояний − *метрика* κ − есть оптимальное значение целевой функции следующей задачи линейного программирования:

минимизировать κ (*по совокупности* κ *и всех* ξ_i, *где* $i=[1,n]$),
при условиях:

$$\kappa \ge 0\,, \qquad d_k \le \xi_k \le D_k\,, \quad ,$$

$$r_k - \kappa \le \xi_k \le R_k + \kappa\,, \qquad k=[1,n]\,,$$

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{k-1} A_{ki}\xi_i\,, \qquad k=[2,n]\,.$$

Заметим, что понятие метрики имеет смысл лишь для совместных состояний математической модели.

Метрику подобного вида принято называть *чебышевской* метрикой. Она, в отличие от стандартной геометрической евклидовской метрики, допускает содержательную интерпретацию для моделей социально-экономических объектов или процессов.

Группировка целевых границ

Используемая метрика обладает следующей особенностью, осложняющей анализ квазиоптимальных состояний:

> для оптимального значения κ, значения некоторых показателей могут иметь не единственное значение.

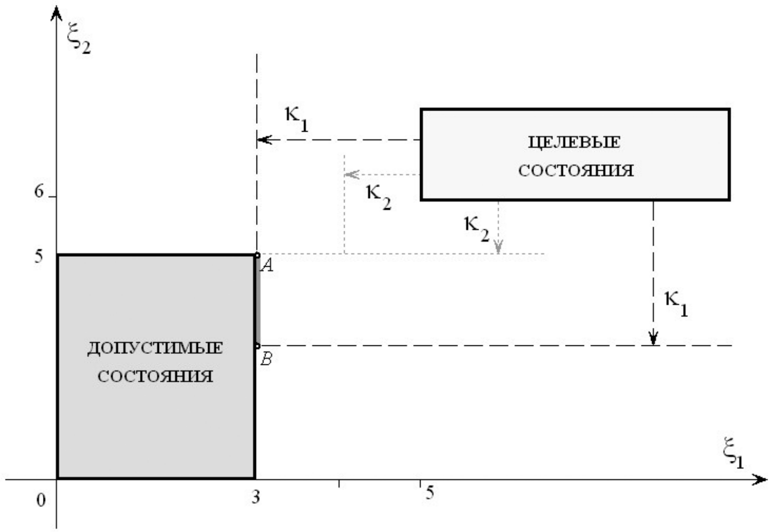
В этом случае для облечения процесса анализа множества квази оптимальных состояний неполной математической модели применяется специальная процедура устраняющая неоднозначность значения показателей.

Эта процедура, называемая *группировкой границ целевых диапазонов*, заключается в последовательном решении задач нахождения величины метрики, для каждой из которых из условия задачи исключаются ограничения, содержащие переменную κ путем превращения ее в константу в тех *активных неравенствах*, которые определяют оптимальное значение метрики для предыдущей задачи.

Для иллюстрации рассмотрим математическую модель с двумя показателями ξ_1 и ξ_2, диапазоны допустимых значений которых описывается условиями: $\begin{matrix} 0 \le \xi_1 \le 3, \\ 0 \le \xi_2 \le 5, \end{matrix}$ а множество целевых состояний – условиями: $\begin{matrix} 5 \le \xi_1 \le 11, \\ 6 \le \xi_2 \le 8, \end{matrix}$ тогда задача нахождения значения метрики принимает вид:

минимизировать κ *при условиях*:

$$\begin{aligned} &\kappa \ge 0, \\ &0 \le \xi_1 \le 3, \\ &0 \le \xi_2 \le 5, \\ &5-\kappa \le \xi_1 \le 11+\kappa, \\ &6-\kappa \le \xi_2 \le 8+\kappa. \end{aligned}$$



Процедура *группировки* целевых ограничений.

Эта задача легко решается графически, и из рис. мы находим очевидный ответ: $\kappa = 2$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = [4{,}5]$. Заметим, что переменная ξ_2 определяется в этом случае *неоднозначно.* Решение - отрезок *AB*.

На следующем шаге процедура группировки целевых границ требует замену переменной κ константой 2 в активных ограничениях задачи.

Такое ограничение в рассматриваемом случае единственное: $5 - \kappa \le \xi_1$. Выполнив данную подстановку, получаем, что на втором шаге процедуры необходимо решать задачу вида:

минимизировать κ *при условиях*:

$$\begin{aligned}
&\kappa \ge 0,\\
&0 \le \xi_1 \le 3,\\
&0 \le \xi_2 \le 5,\\
&3 \le \xi_1 \le 11 + \kappa,\\
&6 - \kappa \le \xi_2 \le 8 + \kappa .
\end{aligned}$$

Решение и этой задачи также находится графически, оно имеет вид: $\kappa = 1$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = 5$.

Полученное решение определено однозначно, и поэтому процесс группировки закончен. В этом примере разбиение системы ограничений, описывающих множество целевых состояний на группы по их "удаленности" от множества допустимых состояний имеет следующий вид,

Группа	Расстояние до цели	Целевые ограничения в группе
1	2.	$5-\kappa \le \xi_1$
2	1.	$6-\kappa \le \xi_2$
0	0.	$\xi_1 \le 11+\kappa, \quad \xi_2 \le 8+\kappa$

Процесс последовательной фиксации завершается, если:

- либо все ограничения, содержащие κ, оказались зафиксированными;
- либо на некотором шаге процедуры последовательной фиксации значение κ оказалось равным нулю.

В итоге процедура группировки выполняет разбиение множества желательных ограничений на группы (отсюда – ее название), каждая из которых обладает своей собственной количественной оценкой "близости" целей и возможностей. Для большей наглядности эти величины именуются "расстоянием".

Строго говоря, метрикой, определяющей расстояние между множествами допустимых и целевых состояний, является не значение переменной κ, а набор монотонно убывающих чисел $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots, \kappa_T$, где T есть число групп фиксации, каждой из которых соответствует свое расстояние до цели.